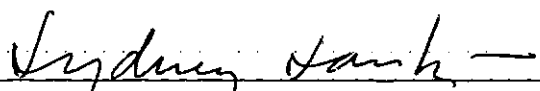


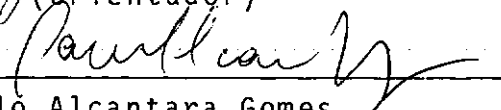
O TEOREMA DA ACOMODAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES


Fábio Rosa da Fonseca

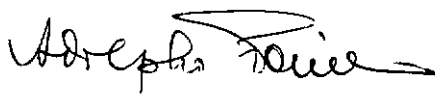
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:


Sydney M.G. dos Santos
(Orientador)


Paulo Alcantara Gomes


Fernando Luiz Lobo B. Carneiro


Adolpho Polillo

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
Novembro de 1986

FONSECA, FÁBIO ROSA DA

O Teorema da Acomodação e suas Aplicações (Rio de Janeiro)
1986.

x , 92 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil,
1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

1. Comportamento plástico de estruturas carregadas ciclicamente

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo constante incentivo.

Aos Professores da COPPE, pelo embasamento ini-
cial.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Professor Sydney Santos, pela confiança deposi-
tada.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. S c.)

O TEOREMA DA ACOMODAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

Fábio Rosa da Fonseca

Julho de 1984

ORIENTADOR: Sydney M. G. dos Santos

PROGRAMA: Engenharia Civil

Inicialmente procuram-se rever os conceitos básicos do cálculo estrutural na fase plástica, prosseguindo com suas vantagens e depois com alguns métodos de resolução.

Daí em diante começa-se o estudo da *Acomodação Estrutural*. Mostram-se os ensaios executados por NEAL e SYMONDS em pórticos metálicos, e em seguida se demonstra o teorema da acomodação sob dois ângulos: momentos e tensões residuais.

Finalmente tecem-se conclusões sobre os métodos de cálculo plástico levando-se em conta o teorema da acomodação.

Como apêndice inclui-se o cálculo plástico aplicado ao concreto armado, nas apresentações de BAKER e de MACCHI.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILL-
MENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
(M. Sc.)

THE SHAKE-DOWN THEOREM AND ITS APPLICATIONS

Fábio Rosa da Fonseca

July, 1984

CHAIRMAN: Sydney M. G. dos Santos

DEPARTMENT: Civil Engineering

In this work, the basic concepts related to the plastic design of structures are reviewed. The advantages and some methods of the plastic design are presented.

The shake-down problem is studied. The tests of metallic frames carried out by NEAL and SYMONDS are shown and the shake-down theorem is proved, in terms of residual bending moments and residual stresses.

Conclusions about the plastic design, taking into account the shake-down theorem, are given.

The plastic design of reinforced concrete, according to BAKER and MACCHI, is also commented.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - CONCEITUAÇÕES E DEFINIÇÕES</u>	1
1.1 - Momento de Plastificação, Carga de Colapso e Rótula Plástica.....	1
1.2 - Estados Limites.....	7
1.2.1 - Estado Limite da Elasticidade.....	7
1.2.2 - Estado Limite da Plastificação.....	7
1.2.3 - Estado Limite de Resistência.....	9
<u>CAPÍTULO II - VANTAGENS DO CÁLCULO PLÁSTICO</u>	10
<u>CAPÍTULO III - TEOREMAS GERAIS</u>	11
<u>CAPÍTULO IV - MÉTODO DE CÁLCULO NA FASE PLÁSTICA</u>	13
4.1 - Método das Tentativas.....	13
4.2 - Método da Associação de Mecanismos.....	18
4.3 - Método da Distribuição de Momentos.....	28
4.4 - Método das Desigualdades.....	39
<u>CAPÍTULO V - INTRODUÇÃO À ACOMODAÇÃO</u>	50
5.1 - Plasticidade Alternada.....	51
5.2 - Colapso Incremental.....	52

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO VI - TEOREMAS DA ACOMODAÇÃO</u>	54
6.1 - Teorema Geral da Acomodação	54
6.2 - Teorema Simplificado	56
6.3 - Teorema da Acomodação Particularizado	58
6.4 - Teoremas do Colapso Incremental	60
<u>CAPÍTULO VII - APLICAÇÃO</u>	63
<u>CAPÍTULO VIII - COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL</u>	74
<u>CAPÍTULO IX - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA ACOMODAÇÃO</u>	79
<u>CAPÍTULO X - CONCLUSÕES</u>	88
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	91

LISTA DE NOTAÇÕES

f_{yk}	- tensão de escoamento
C	- resultante de compressão
T	- resultante de tração
z	- braço de alavanca na seção
m_e^{lim}	- momento elástico limite
m_{ep}	- momento elasto-plástico
m_p	- momento de plastificação
β	- núcleo elástico
SP	- setor plástico
v	- fator de forma
W	- carregamento qualquer
W_c	- carregamento de colapso plástico
θ	- rotação
C_i^j	- combinação de i, j a $j, 0 \leq j \leq i$
W_i	- carregamento de colapso incremental
W_a	- carregamento de colapso por plasticidade alternada
W_s	- carregamento de acomodação
m	- momento residual

M	- momento solicitante
μ	- momento elástico
i	- seção genérica
\bar{m}	- momento residual particular
μ^{\max}	- momento elástico máximo
μ^{\min}	- momento elástico mínimo
EJ	- rigidez elástica
E	- módulo de elasticidade longitudinal
B	- quantidade dimensional
δ	- incremento infinitesimal
ε	- deformação unitária
ε_e	- deformação elástica
ε_p	- deformação permanente
σ	- tensão total
σ_e	- tensão para comportamento elástico
σ_{res}	- tensão residual
σ_{est}	- tensão de acomodação
ε_{est}	- deformação de acomodação
K	- energia fictícia de deformação (Koiter)

- f_{ck} - resistência característica do concreto à compressão
- A_s - área de aço
- α - grau de hiperestaticidade

CAPÍTULO I

CONCEITUAÇÕES E DEFINIÇÕES

No cálculo na fase plástica existem dois caminhos clássicos, muito afins, porém, basicamente distintos: a *verificação* e o *projeto*.

Na *verificação*: a estrutura é conhecida em geometria, propriedades mecânicas e seu material constitutivo. Pesquisa-se a carga de colapso.

No *projeto*: as cargas de colapso e as propriedades mecânicas do material são adotadas. Projeta-se uma estrutura que em geral, terá que atender a condições arquitetônicas e econômicas, além das resistentes.

1.1 - MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO, CARGA DE COLAPSO E RÔTULA PLÁSTICA

Consideremos uma viga bi-apoiada de seção retangular com uma carga concentrada P , no meio do vão (Figura 1.a), constituída de um material que tem a lei tensão-deformação mostrada na (Figura 1.b).

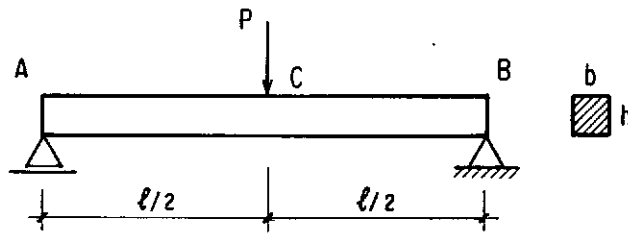


Fig. 1.a

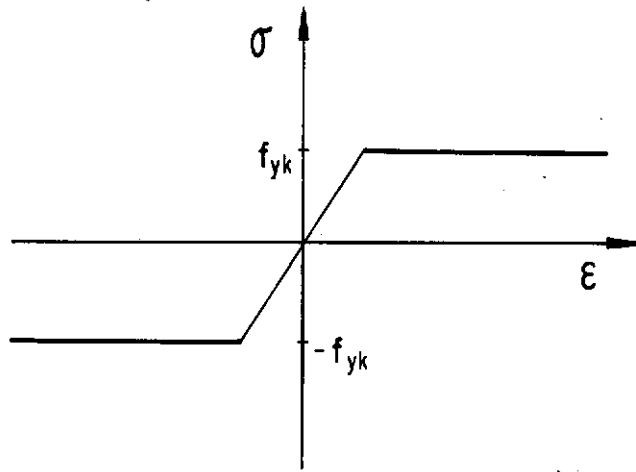
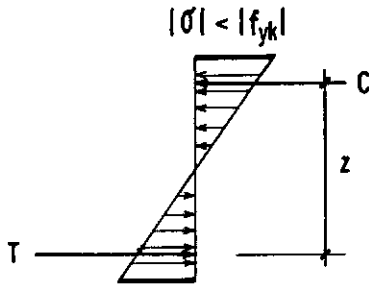


Fig. 1.b

Inicialmente suponhamos que P assumo um valor tal que a seção central da viga (mais solicitada) ainda esteja em regime elástico. O diagrama de tensões nessa seção será o mostrado na (Figura 1.c). É bom lembrar que, o binário resultante desse diagrama estará resistindo ao momento causado pela carga P no meio do vão que é $\frac{P\ell}{4}$.



$$T \cdot z = \frac{P\ell}{4}$$

Fig. 1.c

Agora imaginemos que P vá aumentando. Ele cresce até que as fibras, mais afastadas da linha neutra na seção C atinjam a tensão de escoamento (f_{yk}); as demais, continuam em regime elástico.

Essa é a situação em que o cálculo elástico convencional indica a estrutura como inservível. Tal carga, assim concebida, receberá a notação P_e (Figura 1.d). Ao momento resistente da seção C daremos o nome, momento elástico limite m_e^{lim} , que será obtido do binário do diagrama de tensões na (Figura 1.e).

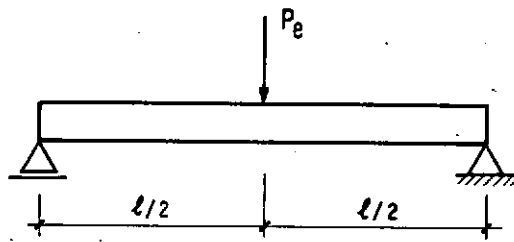
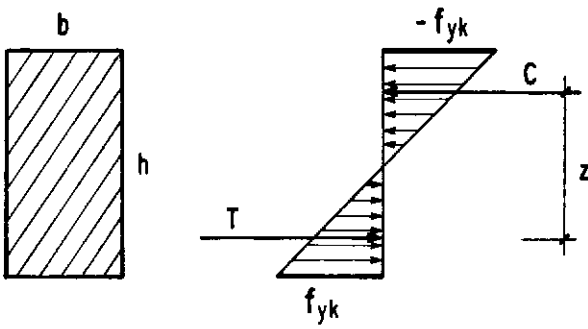


Fig. 1.d



$$z = \frac{2}{3} h$$

$$|C| = |T| = f_{yk} \frac{bh}{4}$$

$$\therefore m_e^{\text{lim}} = f_{yk} \frac{bh^2}{6}$$

Fig. 1.e

Fazendo-se com que P cresça ainda mais, ou seja, $P > P_e$, será fácil perceber que outras fibras da seção C entrarão também em plastificação (atingirão o f_{yk}); as restantes, ainda em regime elástico, formarão o chamado *núcleo elástico* (β) mostrado na (Figura 1.f); e mais outras seções próximas à central terão algumas fibras escoadas; começará a surgir o setor plástico (SP) como na (Figura 1.g).

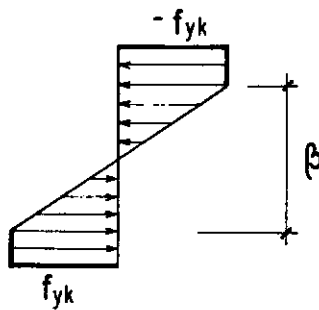


Fig. 1.f

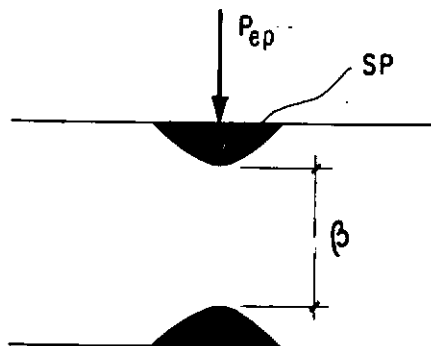


Fig. 1.g

O momento que a seção C estará suportando chamaremos de momento elasto-plástico (m_{ep}) e será dado pelo binário do diagrama de tensões da (Figura 1.f), assim:

$$m_{ep} = f_{yk} \frac{b(h^2 - \beta^2)}{4} + f_{yk} \frac{b\beta^2}{6}$$

Finalmente faremos com que P ultrapasse o valor de P_{ep} , de maneira que toda a seção C escoe, (Figura 1.h). Essa força, batizaremos *carga de colapso* P_c , isto é, aquela que faz a estrutura ficar na iminência de ruína, bastando um acréscimo infinitesimal para que a mesma se desloque como um mecanismo cinemático.

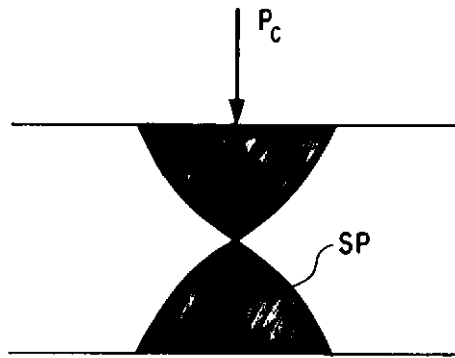


Fig. 1.h

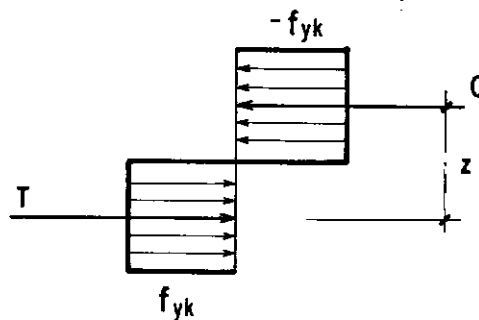


Fig. 1.i

Nesse estágio o momento resistente da seção receberá o nome de *momento de plastificação* m_p , que terá seu valor dado pelo binário do diagrama da (Figura 1.i), situação limite teórica:

$$|C| = |T| = f_{yk} \frac{bh}{2}$$

$$z = \frac{h}{2}$$

$$m_p = f_{yk} \cdot \frac{bh^2}{4}$$

No cálculo plástico, assim como no cálculo elástico, as estruturas serão supostas como se fossem constituídas de hastes. Tal medida, por um lado ignorou a existência do setor plástico nas peças escoadas, mas por outro simplificou bastante o traçado dos diagramas e cálculos em geral, e o que é mais importante, não prejudicou o confronto teórico-experimental. Portanto a seção plastificada (seção C) será representada por um pequeno círculo pintado em negrito, chamada de *rótula plástica* (r_p), na qual estará atuando o momento de plastificação (m_p) (Figura 1.j). Admitiremos que acima deste valor a rotação é livre. As rótulas plásticas deverão aparecer nas extremidades das barras ou nos pontos de aplicação das cargas concentradas, pois sendo as hastes retas, os diagramas serão sempre lineares. Para carga uniformemente distribuída sobre a barra, a posição da r_p não é conhecida *à priori*, mas com a aplicação dos métodos que trataremos mais adiante a sua localização, bem como a carga de colapso, são facilmente detectadas.

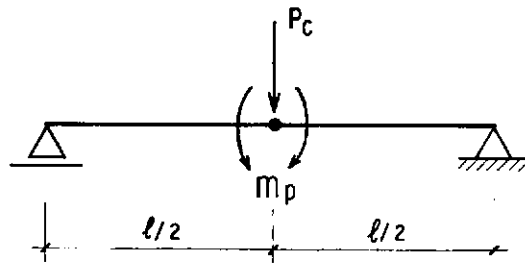


Fig. 1.j

À relação do momento de plastificação com o momento elástico limite daremos o nome de fator de forma (v)

$$v = \frac{m_p}{m_e}$$

Como o nome indica esse fator depende essencialmente da forma das seções. A Tabela I reúne vários tipos de seção em aço.

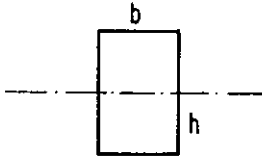
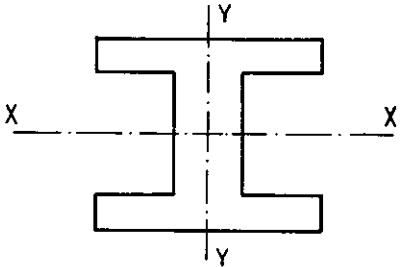
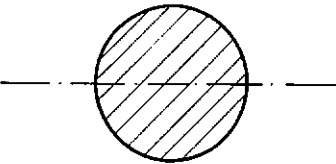
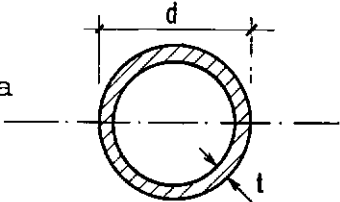
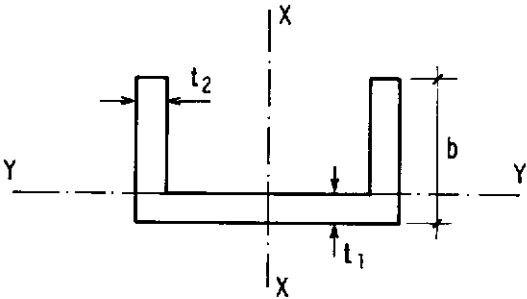
1.2 - ESTADOS LIMITES

1.2.1 - Estado Limite da Elasticidade

Alcançar-se-á este estado quando em algum ponto da peça for atingida a tensão de escoamento.

1.2.2 - Estado Limite da Plastificação

O surgimento da primeira rótula plástica no sistema estrutural determina esse estado. O número de articulações plásticas necessário para tornar esse sistema um mecanismo depen

SEÇÃO	FATOR DE FORMA (v)
Retangular 	1,5
Seção "i" 	Eixo X-X 1,15
	Eixo Y-Y 1,67
Circular cheia 	1,70
Circular vazada 	$t = \frac{1}{16} d, v = 1,40$ $t \ll d, v = 1,27$
	Eixo X-X 1,17
	Eixo Y-Y- $t = 0,15 b, v = 1,80$

Tab. I

derá, em geral, do seu grau de indeterminação estática.

1.2.3 - Estado Limite de Resistência ou Estado de Ruína ou Configuração ou Estado de Colapso

Quando a estrutura estiver na iminência de se deslocar. O colapso pode ser *parcial* ou *total*. O *Parcial* ocorre quando uma ou mais partes da estrutura tornam-se móveis. Já o *colapso total*, só se configura com o deslocamento da mesma como um todo.

CAPÍTULO II.VANTAGENS DO CÁLCULO PLÁSTICO

Os motivos que levaram à adoção do cálculo em regime plástico, podem ser assim enunciados:

- a) A economia que os projetos realizados nessas bases podem desfrutar, por conduzirem a cargas limites maiores;
- b) A propriedade de certos materiais de apresentarem patamar de escoamento;
- c) A possibilidade de se admitir, com aproximação compatível com as aplicações, que as seções totalmente plastificadas se comportem como articulações;
- d) O melhor conhecimento da situação de colapso com análise mais objetiva do que ocorrerá e de como a estrutura poderá colapsar-se;
- e) A facilidade com que se podem determinar as cargas de colapso.

CAPÍTULO III

TEOREMAS GERAIS

O par de teoremas que forma a base de todo o cálculo estrutural na fase plástica, é conhecido como *teoremas gerais*.

Esses teoremas foram formulados por GREENBERG e PRAGER; dividem-se em *teorema estático* ou do *equilíbrio plástico* e *teorema cinemático* ou das *cadeias plásticas*.

O teorema estático pode assim ser enunciado:

"Se para uma dada estrutura for possível determinar um diagrama de momentos fletores decorrente do carregamento W , coerente e estaticamente admissível sem que em nenhum de seus pontos se ultrapasse m_p , esse W será menor quando muito igual à carga de colapso plástico W_c ";

$$W \leq W_c$$

O *teorema cinemático* será dito da seguinte forma:

"Se uma dada estrutura estiver submetida a um carregamento W , que corresponda a qualquer mecanismo que lhe seja compatível, esse W será maior ou igual à carga de colapso plástico W_c ";

$$W \geq W_c$$

Portanto, a carga de colapso estará sempre acima de um valor numérico obtido por considerações estáticas e abaixo de outro determinado por imposições cinemáticas. Assim podemos dizer que o *teorema estático* (safe theorem) fornece um *limite inferior*, e o *cinemático* (unsafe theorem) um *limite superior* da carga de colapso.

Esses teoremas podem ser reunidos num só, o *teorema da univocidade*, que diz:

"Se para uma estrutura hiperestática (grau α) sujeita a um carregamento W , determinarmos um diagrama de fletores coerente, estaticamente admissível e tal que em $\alpha + 1$ seções o momento seja o de plastificação, esse carregamento será o de colapso".

CAPÍTULO IV

MÉTODOS DE CÁLCULO NA FASE PLÁSTICA

Calcular uma estrutura na fase plástica, significa pesquisar o mecanismo menos resistente, ou seja, a cadeia que irá conduzir ao menor valor de W . Serão apresentados brevemente, quatro métodos para esse fim, a saber:

- Método das tentativas;
- Método da associação de mecanismos;
- Método da distribuição de momentos;
- Método das desigualdades.

4.1 - MÉTODO DAS TENTATIVAS

Consiste simplesmente em experimentar diversas cadeias, e ir pesquisando o W de menor valor.

As tentativas nada valeriam, não fossem os teoremas de Greenberg e Prager, pois obtido um W menor que os anteriormente calculados, nada poderíamos afirmar sobre a existência de um mecanismo ainda mais fraco, ou seja de menor W .

Faremos duas aplicações para dar maior entendimento ao método.

Na primeira deseja-se calcular a carga de colapso de um pórtico bi-engastado, no qual todas as barras se plastificam com o momento m_p . O quadro está sujeito a duas cargas concentradas como na (Figura 4.a).

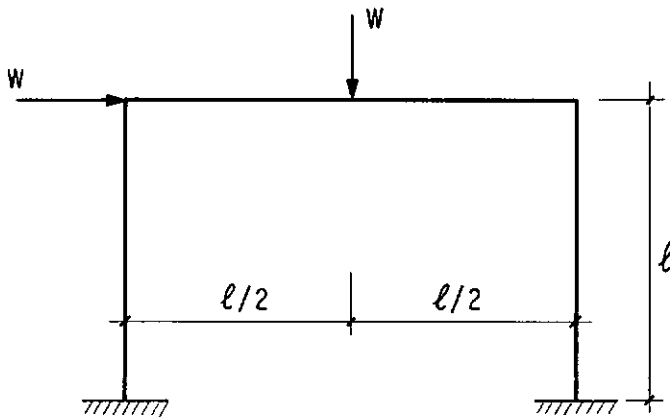
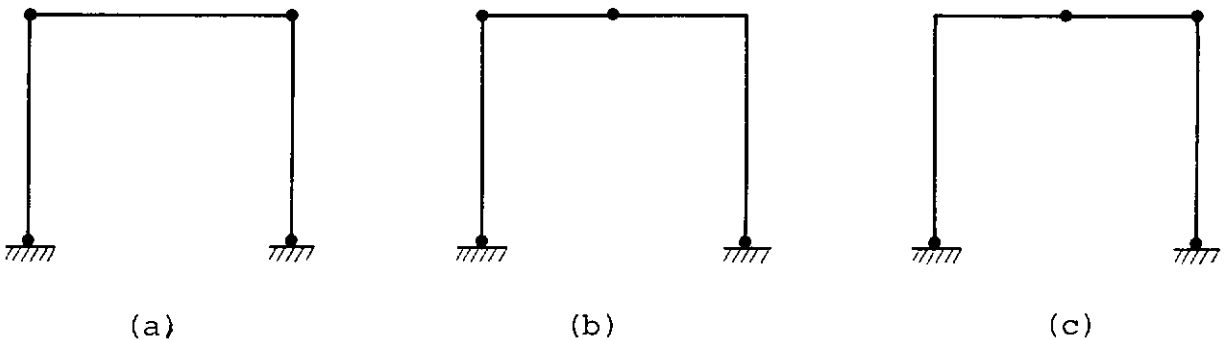


Fig. 4.a

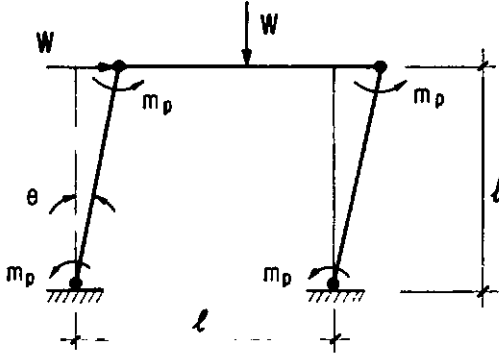
O grau de indeterminação do pórtico, é 3, portanto são necessárias quatro rótulas plásticas para torná-lo um mecanismo. Os possíveis mecanismos a ensaiar são:



Basta usar o princípio dos trabalhos virtuais para um pequeno e arbitrário deslocamento em cada um dos mecanismos

mos.

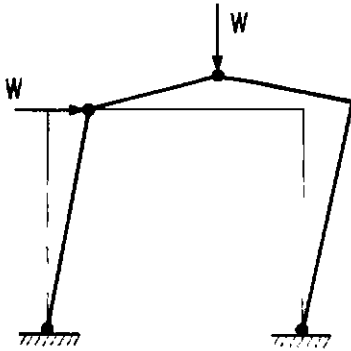
(a)



$$Wl\theta - m_p \cdot 4\theta = 0$$

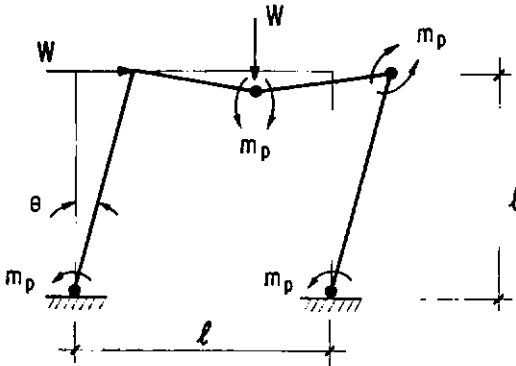
$$W = 4 \frac{m_p}{l}$$

(b)



não será necessário ensaiar pois a carga vertical trabalhará negativamente, ou seja, haverá um alívio de plastificação na rótula, resultando numa carga de colapso superior a dos demais mecanismos.

(c)



$$2Wl\theta - m_p \cdot 6\theta = 0$$

$$W = 3 \frac{m_p}{l}$$

Portanto, fazendo uso do teorema cinemático, a carga de colapso será:

$W_c = 3 \frac{m_p}{l}$, e o mecanismo de ruína, o (C). O diagrama de momentos no colapso será o da (Figura 4.b).

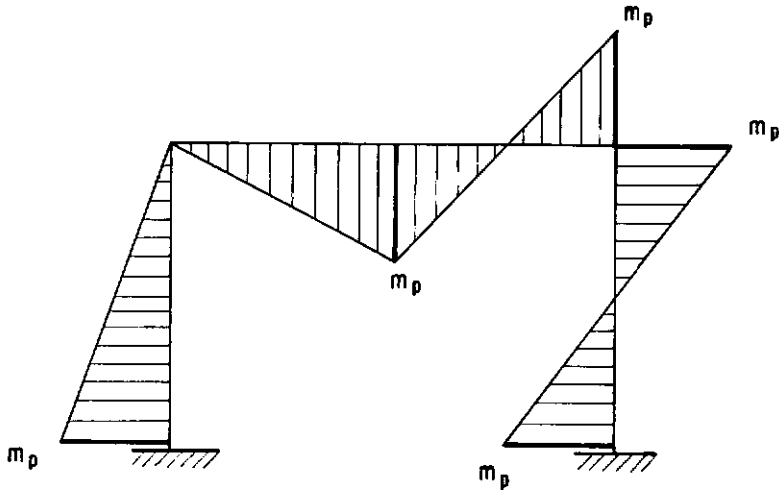


Fig. 4.b

A seguir vemos na (Figura 4.c) um outro pórtico, no qual as barras resistem até um momento m_p . Procura-se a carga de colapso plástico associada a ele.

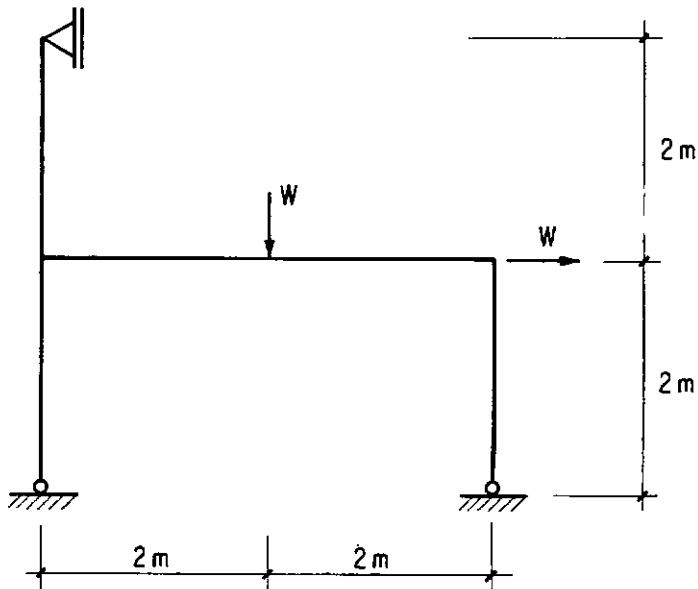


Fig. 4.c

Sendo igual a 2 o grau de hiperestaticidade da estrutura, serão necessárias três rótulas plásticas para configurar o estado de ruína.

Lembrando-se que os locais prováveis para o surgimento de rótulas plásticas são as extremidades das barras e os pontos de aplicação de carga concentrada, observa-se que no caso esses locais perfazem um total de 3, indicando a possibilidade de ensaiar apenas uma cadeia, (Figura 4.d).

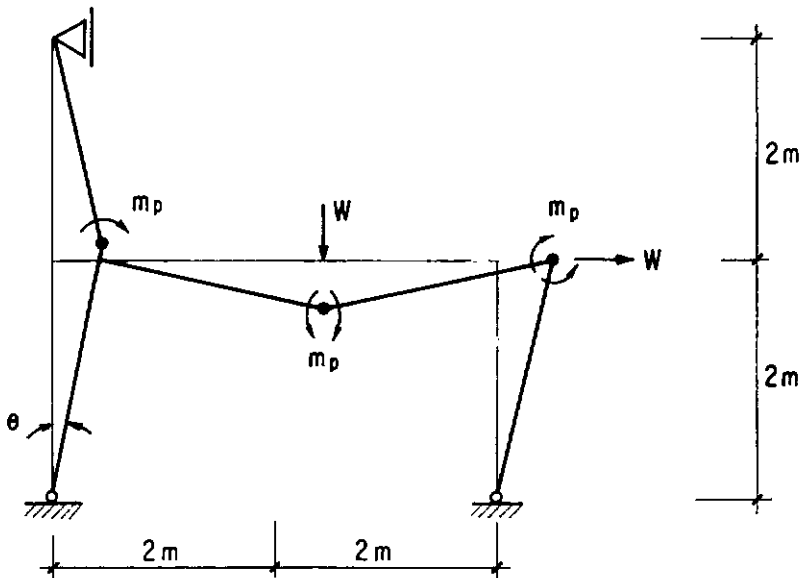


Fig. 4.d

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para uma deformação arbitrária θ , vem:

$$W \cdot 2\theta + W \cdot 2\theta - m_p \cdot 5\theta = 0$$

$$\therefore W_c = 1,25 m_p \quad (\text{numericamente})$$

O diagrama de momentos fletores no colapso será o da (Figura 4.e).

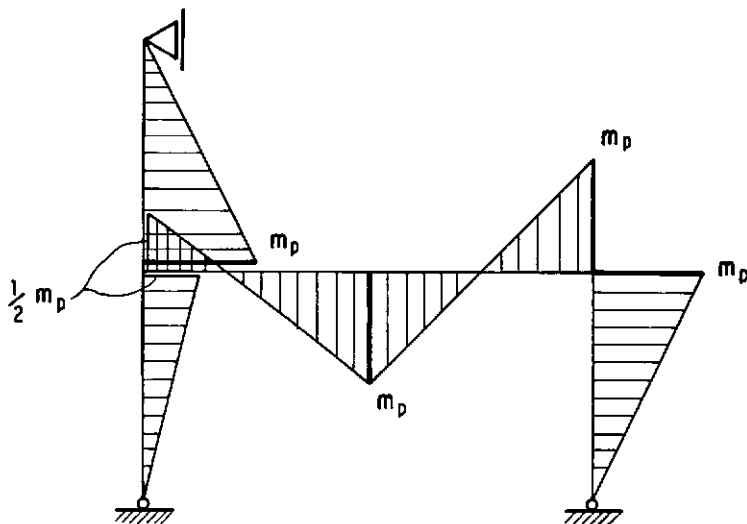


Fig. 4.e

4.2 - MÉTODO DA ASSOCIAÇÃO DE MECANISMOS

Consiste em combinar os mecanismos singelos de todos os modos possíveis, a fim de encontrar o menor valor de W , valendo-se do princípio dos trabalhos virtuais (P.T.V.).

Para uma estrutura complexa, o número de cadeias a estudar será muito grande; mas o que se verifica é que grande parte delas pode ser eliminada em face de observações fáceis e imediatadas.

Os mecanismos singelos são: de andar, viga, e nó. Veja (Figura 4.f).

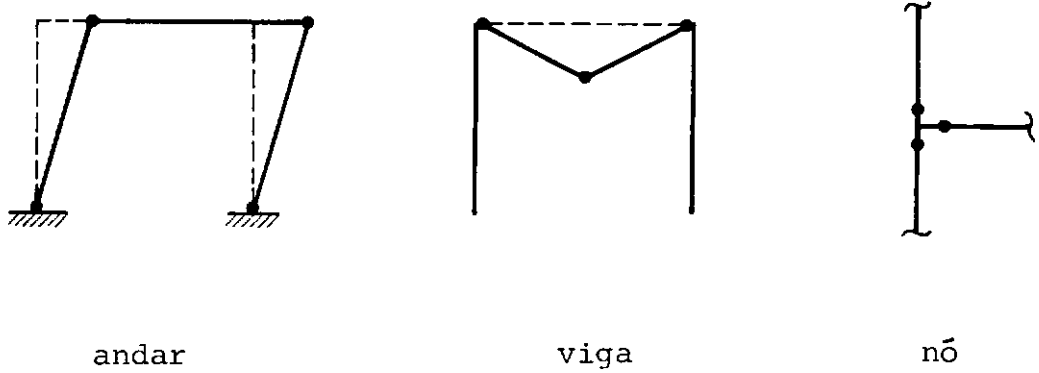


Fig. 4.f

Exemplificaremos, primeiramente, com um pórtico de dois andares, com momento de plastificação m_p em todas as barras, submetido a cargas concentradas, como na (Figura 4.g).

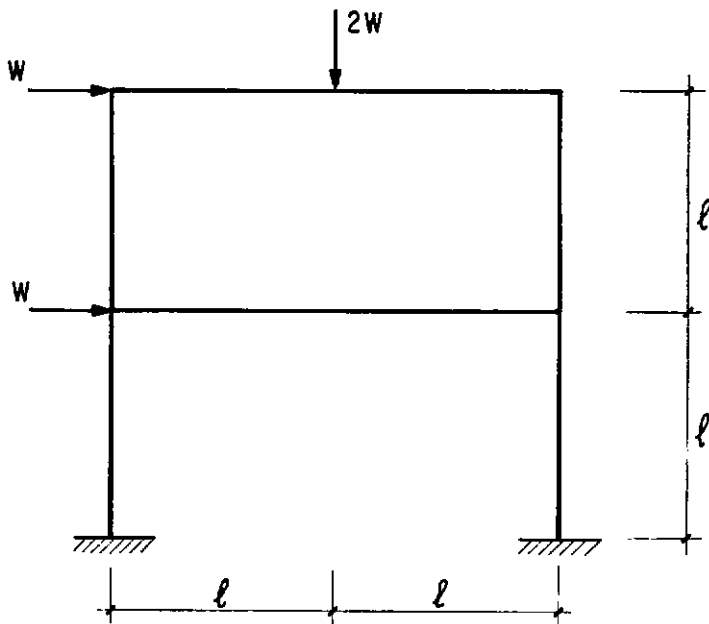
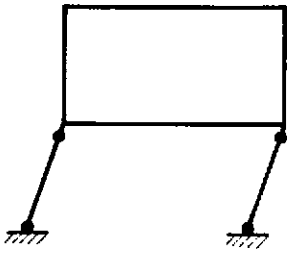
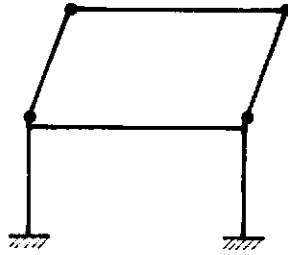


Fig. 4.g

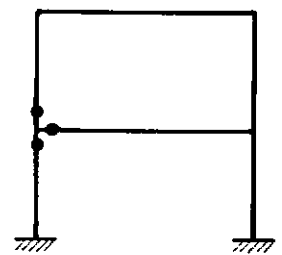
São cinco os mecanismos singelos:



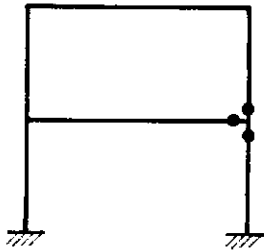
(a)



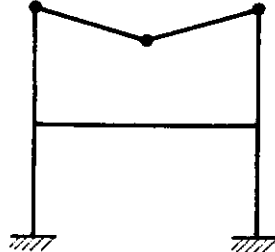
(b)



(c)



(d)



(e)

O número de mecanismos a ensaiar será:

$$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - 1 = 31$$

Abaixo vemos a Tabela II com as combinações dos mecanismos.

	CADEIAS
C_5^1	a, b, c, d, e
C_5^2	ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de
C_5^3	abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde
C_5^4	abcd, abce, abde, acde, bcde
C_5^5	abcde

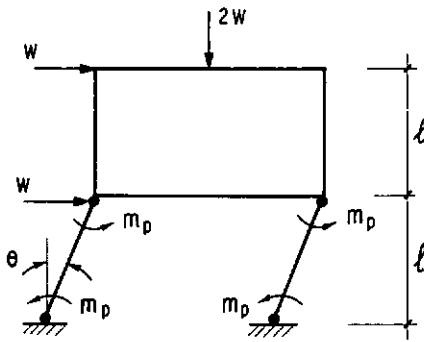
TAB. II

Consegue-se eliminar vinte e cinco mecanismos por motivos tais como:

- mecanismo constituído de mais de sete rótulas plásticas (ex.: ab);
- impossibilidade de ser ensaiado sozinho (ex.: cd);
- mecanismo com dois graus de liberdade (ex.: ae).

Restando, assim seis mecanismos possíveis, dos quais três são singelos.

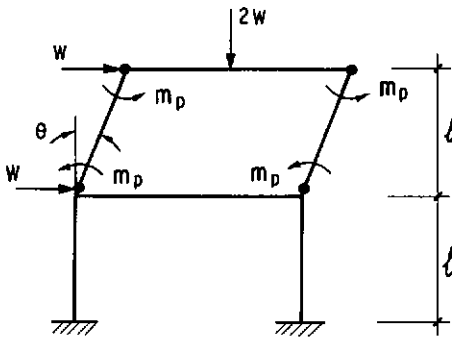
Mecanismo de andar inferior:



$$2Wl\theta - 4 m_p \theta = 0$$

$$W = 2 \frac{m_p}{l}$$

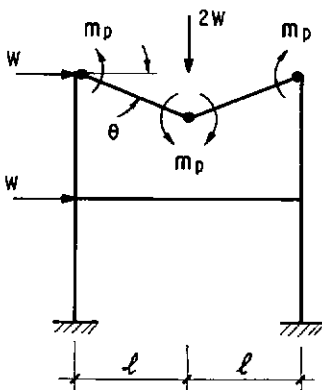
Mecanismo de andar superior:



$$Wl\theta - 4 m_p \theta = 0$$

$$W = 4 \frac{m_p}{l}$$

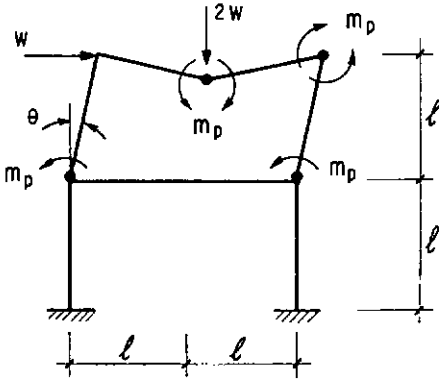
Mecanismo de viga:



$$2Wl\theta - 4 m_p \theta = 0$$

$$W = 2 \frac{m_p}{l}$$

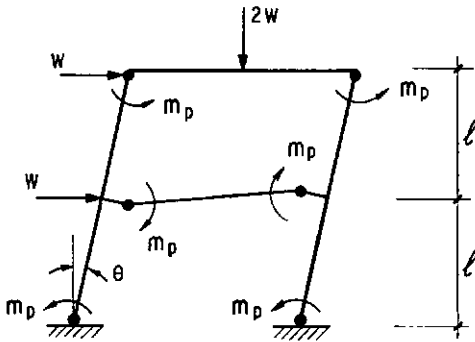
Mecanismo de andar superior + viga (be)



$$3Wl\theta - 6 m_p \theta = 0$$

$$W = 2 \frac{m_p}{l}$$

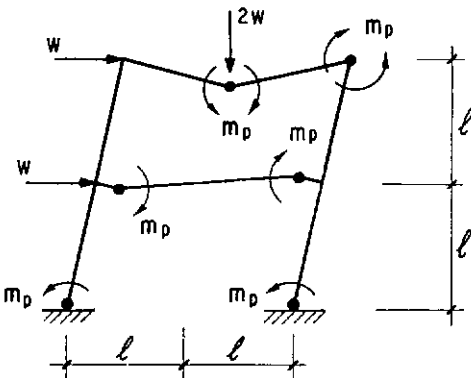
Mecanismo de andar total (abcd)



$$W_\theta (l + 2l) - 6 m_p \theta = 0$$

$$W = 2 \frac{m_p}{l}$$

Mecanismo de andar total e viga (abcde)



$$W_\theta (l + 2l) + 2Wl\theta - m_p 8\theta = 0$$

$$W = \frac{8}{5} \frac{m_p}{l}$$

sendo portanto, o mecanismo de colapso, o formado pela associação de todas as cadeias singelas ($W_c = \frac{8}{5} \frac{m_p}{\ell}$), que fornece o diagrama de fletores da (Figura 4.h).

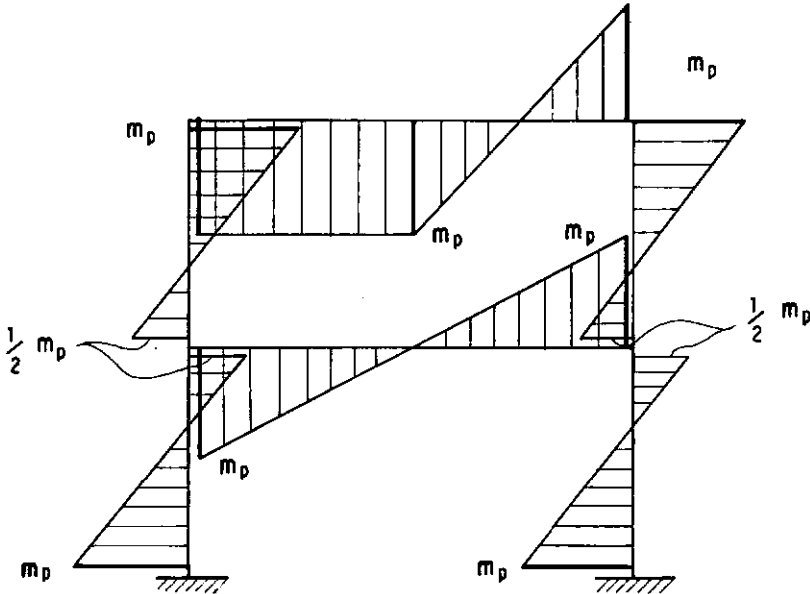


Fig. 4.h

Adiante examinaremos a carga de colapso do pórtico estudado no item anterior, só que agora substituindo a carga concentrada sobre a viga por sua equivalente uniformemente distribuída (Figura 4.i).

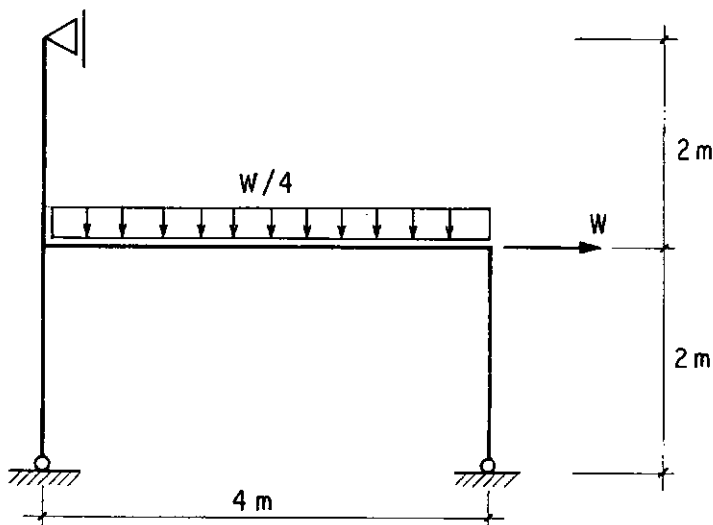
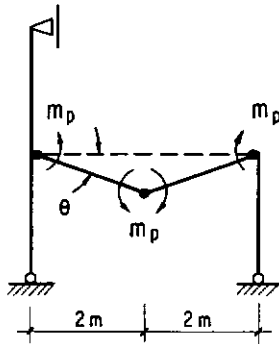


Fig. 4.i

São três os mecanismos singelos:

a) de viga

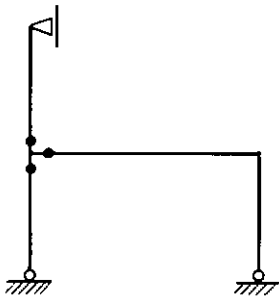


aplicando o P.T.V.:

$$\frac{W}{4} \frac{2\theta \cdot 4}{2} - m_p 4\theta = 0$$

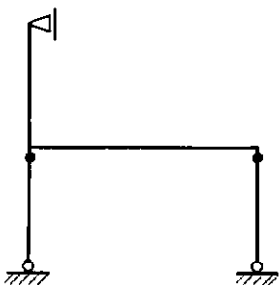
$$W = 4 m_p \text{ (numericamente)}$$

b) de não



não pode ser ensaiado
sozinho

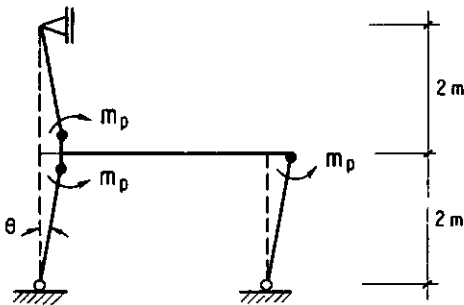
c) de andar



não pode ser ensaiado
isoladamente

Matematicamente teríamos que ensaiar $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1 = 7$ cadeias, mas as que são formadas por associações dos mecanismos acima possuindo um número de rótulas plásticas maior que 3, $(\alpha + 1)$, serão abandonas; como é o caso de (ab), e, (ac).

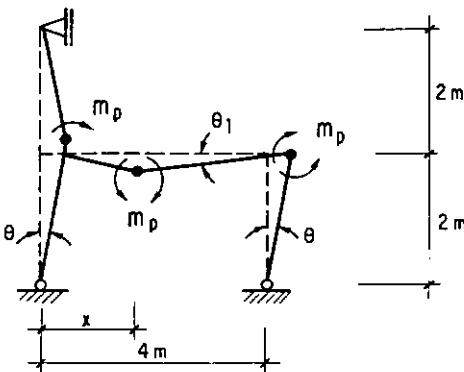
d) mecanismo (bc)



$$W \cdot 2\theta - m_p 3\theta = 0$$

$$W = 1,5 m_p \text{ (numericamente)}$$

e) mecanismo (abc)



$$\theta_1 = \frac{x\theta}{4-x}$$

APLICAÇÃO DO P.V.T.:

$$W \cdot 2\theta + \frac{W}{4} \frac{x\theta}{2} \cdot 4 - m_p 3\theta - m_p 2\theta_1 = 0$$

$$W \cdot 2\theta + \frac{W}{4} \frac{x\theta}{2} \cdot 4 - m_p 3\theta - m_p \theta \left(\frac{2x}{4-x} \right) = 0$$

$$W \left(2 + \frac{x}{2} \right) - m_p \left(\frac{12-x}{4-x} \right) = 0$$

$$W = m_p \left(\frac{12-x}{8-x^2/2} \right)$$

Para se obter o mínimo de W , basta igualar a derivada de W a zero, vem:

$$W' = m_p \left| - \frac{(8-x^2/2) - (12-x)(-x)}{(8-x^2/2)^2} \right| = 0$$

com $x \neq \pm 4$

$$- 8 + x^2/2 + 12x - x^2 = 0$$

$$- x^2/2 + 12x - 8 = 0$$

$$x = 23,3 \text{ ou } x = 0,7$$

O único x possível é $0,7$ m, o outro estará fora da estrutura.

$$W = 1,46 m_p \text{ (numericamente)}$$

Sendo portanto o mecanismo formado pela associação das três cadeias singelas, o de colapso.

O diagrama de fletores no colapso ($W_c = 1,46 m_p$) será o da (Figura 4.j).

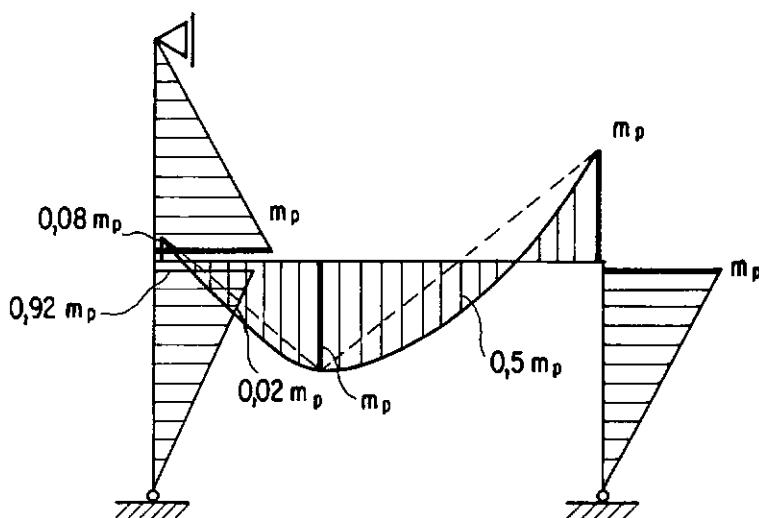


Fig. 4.j

4.3 - MÉTODO DA DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS (M.D.M.)

Esse método desenvolvido por M. R. Horne, consiste em distribuir os momentos desequilibrantes nos nós de modo a obter o diagrama final da estrutura.

O suporte desse método é o teorema estático.

O M.D.M. conduz diretamente à cadeia de colapso ou, indiferentemente, a limites que enquadram a carga de ruína entre valores tão próximos quanto se queira.

O M.D.M. possui quatro passos distintos:

1º Passo: arbitram-se para as hastes diagramas coerentes com os carregamentos, e que satisfaçam às equações da estática, exceto quanto ao equilíbrio dos nós.

2º Passo: ajustam-se os momentos de modo a equilibrar os nós, realizando paralelamente propagações, a fim de que as equações da estática continuem satisfeitas em cada haste.

3º Passo: verifica-se o equilíbrio da estrutura como um todo e promove-se o ajustamento das reações; consequentemente alteram-se os diagramas que devem ser reajustados. Isso pode sempre ser conseguido de muitas maneiras; a preferência será dada àquela que acelerar o traçado do diagrama com $\alpha + 1$ momentos próximos e com valores altos. Como as vezes isso não ocorre, fazer-se-á necessário o passo seguinte.

4º Passo: tenta-se baixar a grandeza de alguns momentos, subindo-se a de outros, de modo a conseguir $\alpha + 1$ seções com momentos bem próximos e mais altos que os demais.

Para melhor compreendermos esse método ilustraremos com duas aplicações.

Um quadro bi-rotulado com todas as barras podendo assumir um momento de plastificação m_p , está sujeito a uma carga concentrada horizontal e outra distribuída na direção vertical, simultaneamente, como na (Figura 4.k).

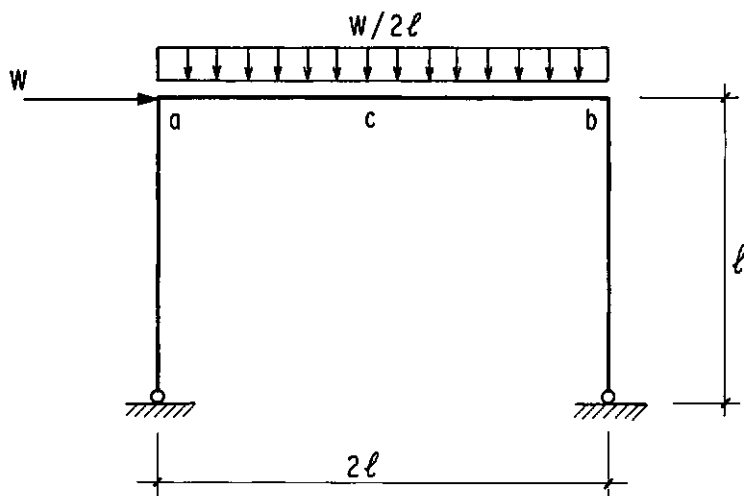


Fig. 4.k

NOTAS: A convenção adotada será a de Grinter: o momento com sentido horário no nó, é dito positivo.

Na barra com carga distribuída o coeficiente de propagação do momento, das extremidades para o centro será $1/4$.

1º Passo: Diagrama coerente (Figura 4.ℓ)

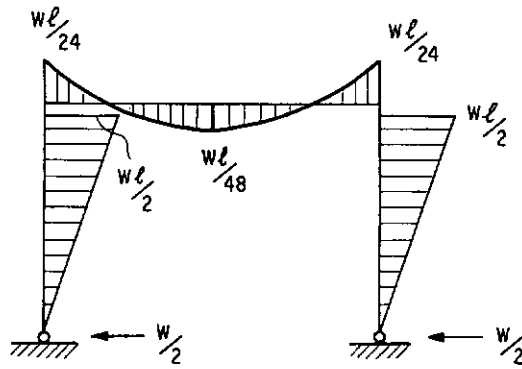


Fig. 4.ℓ

2º Passo: Cálculo dos momentos desequilibrantes em cada nó

$$\Delta M_a = \frac{W\ell}{24} + \frac{W\ell}{2} = \frac{13}{24} W\ell$$

$$\Delta M_b = \frac{W\ell}{2} - \frac{W\ell}{24} = \frac{11}{24} W\ell$$

A seguir vemos a Tabela III, que distribui esses desequilíbrios.

3º Passo: O desequilíbrio estrutural será medido pela comparação das reações horizontais com a carga W.

$$\text{Reação horizontal} = 0,229 W + 0,272 W = 0,501 W$$

$$\text{Des. estrutural} = W - 0,501 W = 0,499 W$$

que foi incluído na Tabela III na linha assinalada com (*).

M_a^i	M_a^d	M_c	M_b^e	M_b^i
0,5	1/24	1/48	1/24	0,5
- 0,271	- 0,271	0,07	- 0,23	- 0,23
		0,06		
0,229	- 0,229	0,15	- 0,272	0,272
0,25	- 0,25	0,06	- 0,25	0,25 (*)
		0,06		
0,479	- 0,479	0,27	- 0,522	0,522

TAB. III

Observando a Tabela III vemos que a 1.^a seção a se plastificar é a b, com uma carga $W = 1,92 \frac{m_p}{\ell} < W_c$ (teorema estático). A segunda rótula plástica aparecerá na seção a e assim constituindo o mecanismo de andar (Figura 4.m).

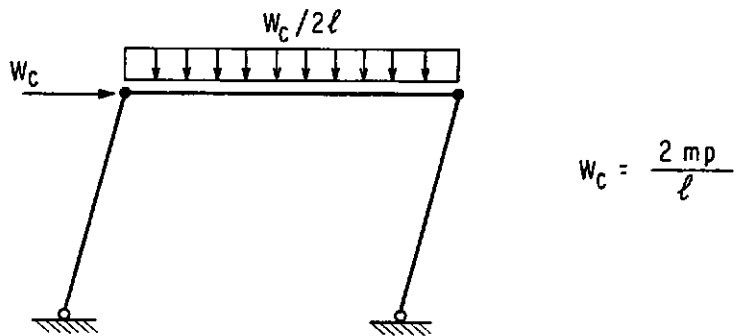


Fig. 4.m

Na iminência de ruptura o pórtico terá o diagrama de momentos visto na (Figura 4.n).

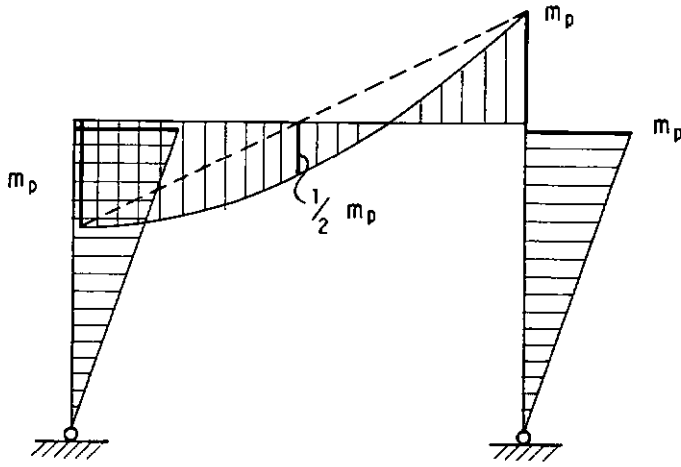


Fig. 4.n

A seguir é proposto o dimensionamento de um pórtico de dois andares em aço, sujeito a várias cargas concentradas, como na (Figura 4.o).

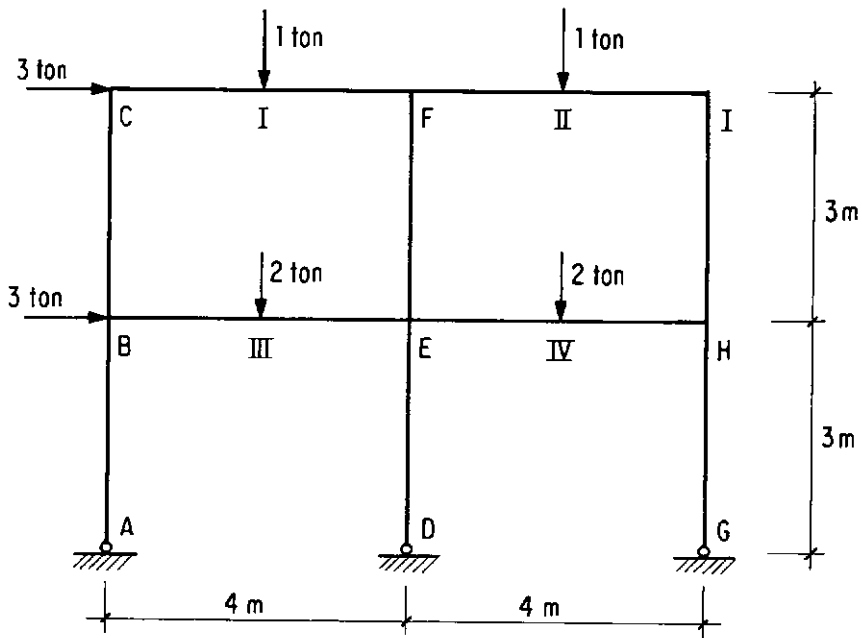


Fig. 4.o

1º passo: Diagrama coerente (Figura 4.p)

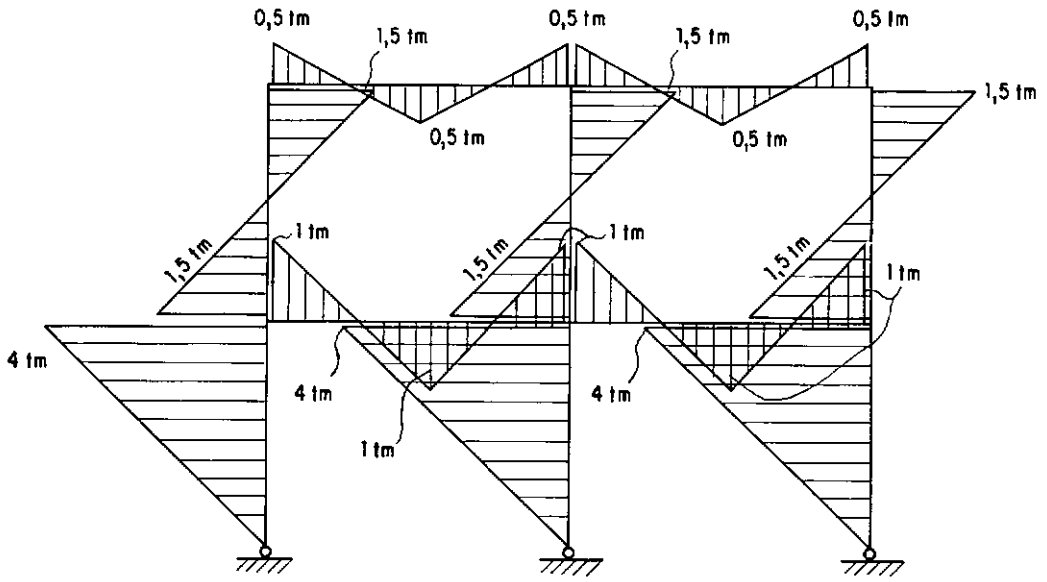


Fig. 4.p

2º passo: Cálculo dos momentos desequilibrantes em cada nó

$$\Delta M_B = - 1,5 \text{ tm}$$

$$\Delta M_C = 2 \text{ tm}$$

$$\Delta M_E = - 2,5 \text{ tm}$$

$$\Delta M_F = 1,5 \text{ tm}$$

$$\Delta M_H = - 3,5 \text{ tm}$$

$$\Delta M_I = 1 \text{ tm}$$

A Tabela IV reúne os coeficientes de propagação de momentos, numa barra:

MOMENTO À ESQUERDA	MOMENTO NO CENTRO DO VÃO	MOMENTO À DIREITA
1	0	1
1	1/2	0
0	- 1/2	1

TAB. IV

Com o auxílio da Tabela IV⁽¹⁾ e distribuindo os momentos desequilibrantes nos nós, construímos a Tabela V.(a) e (b).

3º passo: O desequilíbrio estrutural será medido pela comparação das reações horizontais com as cargas na mesma direção.

$$\Sigma \text{ reação horiz.} = \frac{M_{BA} + M_{ED} + M_{HG}}{3} = 3,04$$

$$\text{Deseq. estrut.} = 6 - 3,04 = 2,96 \text{ t}$$

A parcela que deve ser adicionada a cada um desses momentos é 2,96 tm que aparece na linha assinalada com (*) na Tabela V(b).

(1) sobre a escolha dessa tabela, vide Neal

M_{CB}	M_{CF}	M_I	M_{FC}	M_{FE}	M_{FI}	M_{II}	M_{IF}	M_{IH}
1,5	0,5	0,5	- 0,5	+ 1,5	0,5	0,5	- 0,5	1,5
-1	- 1	- 0,5				+ 0,25	- 0,5	- 0,5
		+ 0,25	- 0,5	- 0,5	- 0,5	- 0,25		
0,5	- 0,5	0,25	- 1	1	0	0,5	- 1	1
0,5				0,62				1,16
- 0,25	- 0,25	- 0,12				0,29	- 0,58	- 0,58
		+ 0,10	-0,21	- 0,21	- 0,21	- 0,10		
0,75	- 0,75	0,23	-1,21	1,41	- 0,21	0,69	- 1,58	1,58

TAB. V(a)

M_{BC}	M_{BA}	M_{BE}	M_{III}	M_{EB}	M_{EF}	M_{ED}	M_{EH}	M_{IV}	M_{HE}	M_{HI}	M_{HG}
1,5	- 4	1	1	- 1	1,5	- 4	1	1	- 1	1,5	- 4
0,5	0,5	0,5	0,25					- 0,58	1,16	1,16	1,16
			0,31	0,62	0,62	0,62	0,62	0,31			
2,0	- 3,5	1,5	0,94	- 0,38	2,12	- 3,38	1,62	0,73	0,16	2,66	- 2,84
- 1					- 0,5					- 0,5	
0,33	0,33	0,33	0,16					- 0,08	0,16	0,16	0,16
			-0,06	+ 0,12	0,12	0,12	0,12	0,06			
1,33	- 3,17	1,83	1,04	- 0,26	1,74	- 3,26	1,74	0,71	0,32	2,32	- 2,68
(*) 1,48	- 2,96	1,48	0,74			- 2,96		- 0,74	1,48	1,48	- 2,96
			-0,49	0,98	0,98		0,98	0,49			
2,81	- 6,13	3,31	1,29	0,72	2,72	- 6,22	2,72	0,45	1,80	3,80	- 5,64

TAB. V. (b)

Observando a mesma tabela vemos que a 1.^a seção a se plastificar é a inferior ao nó E, com um momento de plastificação $m_p = 6,22 \text{ tm}$. A ruptura dar-se-á com o aparecimento de três rótulas plásticas na cabeça dos pilares AB, DE e GH, configurando assim o mecanismo de andar inferior, como na (Figura 4.Q).

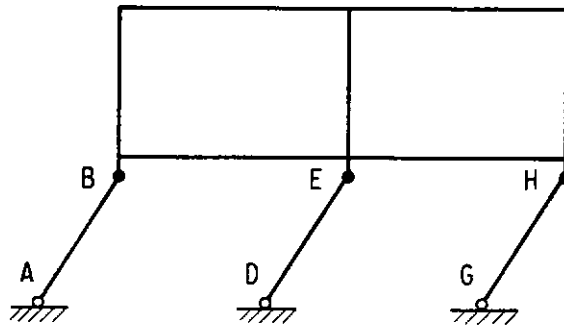


Fig. 4.Q

De posse desses resultados o passo final para o dimensionamento do pórtico em questão será a consulta das tabelas de perfis de aço fornecidas pelos fabricantes, de modo a atender às solicitações com certa margem de segurança.

Tendo essa aplicação sentido apenas didático, imaginaremos que as barras tem seção retangular ($b \times h$), que determinaremos a seguir:



$$b = 10 \text{ cm}$$

$$m_p = 622.000 \text{ kg.cm}$$

$$f_{yk} = 2.400 \text{ kg/cm}^2$$

$$m_p = f_{yk} \frac{bh^2}{4}$$

4.4 - MÉTODO DAS DESIGUALDADES

Desenvolvido por Neal e Symonds, o método das desigualdades, foi preterido pelos anteriores, devido a sua complexidade. A partir do advento dos computadores eletrônicos, que resolvem com excepcional rapidez sistemas de grande número de equações do 1º grau, esse método voltou a ser usado.

Assim como o método anterior, este possui cinco passos bem definidos, a saber:

1º passo: Determinação do número máximo de rótulas plásticas possíveis (n);

2º passo: Determinação do número de momentos fletores que podem ser expressos em função dos demais (η). Esse número é igual à diferença entre a quantidade de rótulas plásticas e o grau de hiperstaticidade da estrutura (α);

$$\eta = n - \alpha$$

3º passo: Determinação dos (η) momentos em função dos demais;

4º passo: Imposição dos limites inferior e superior, aos fletores posicionados nas possíveis rótulas plásticas. Isto significa que teremos $2n$ desigualdades nas n posições;

5º passo: Resolução das desigualdades impostas no passo ante-

rior.

Para fixarmos melhor esse método, vamos resolver dois exemplos.

O primeiro trata-se de uma viga bi-engastada com capacidade de absorver um momento de plastificação m_p , que está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, W . ver (Figura 4.r).

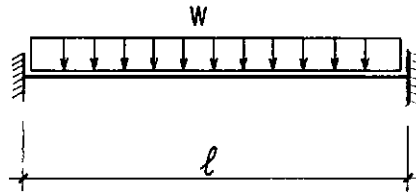
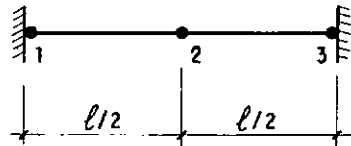


Fig. 4.r

1º passo

$$n = 3$$



2º passo

$\alpha = 2$, pois só existe carga vertical

$$\eta = 3 - 2 = 1$$

3º passo

$$m_2 = \frac{W\ell^2}{8} - \frac{m_1 + m_3}{2}$$

4º passo

$$- m_p \leq m_1 \leq m_p$$

$$- m_p \leq m_2 \leq m_p$$

$$- m_p \leq m_3 \leq m_p$$

5º passo

$$- m_p \leq m_2 \leq m_p \text{ ou,}$$

$$- m_p \leq \frac{W\ell^2}{8} - \frac{m_1 + m_3}{2} \leq m_p$$

supondo que as seções 1 e 3 se plastifiquem, vem:

$$0 \leq \frac{W\ell^2}{8} \leq 2 m_p$$

$$\therefore W_C = 16 \frac{m_p}{\ell^2}$$

O diagrama de fletores no colapso será o da (Figura 4.s).

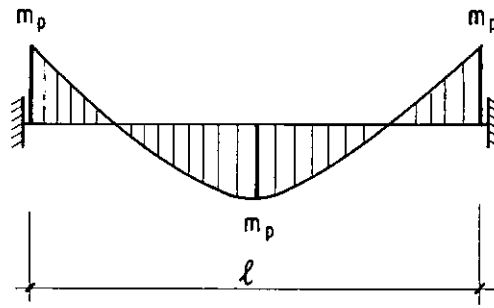


Fig. 4.s

O segundo constitui-se de um pórtico bi-engastado como na (Figura 4.t). Sabendo-se que a viga e os pilares suportam, no máximo, um momento m_p , deseja-se investigar a carga de ruptura da estrutura.

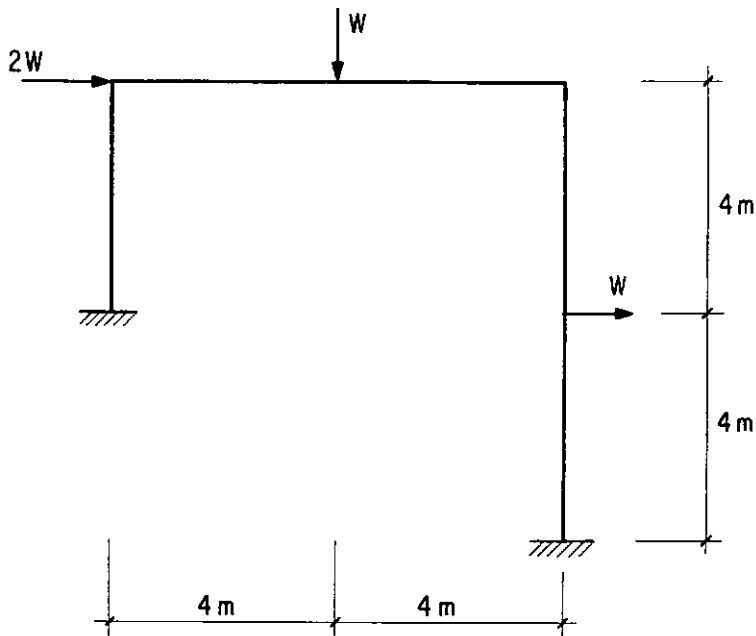
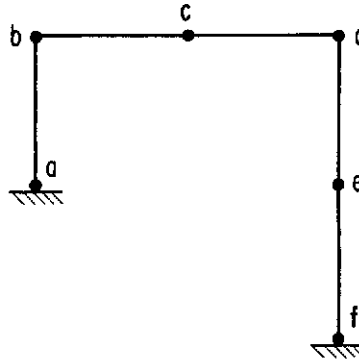


Fig. 4.t

1º passo

$$n = 6$$



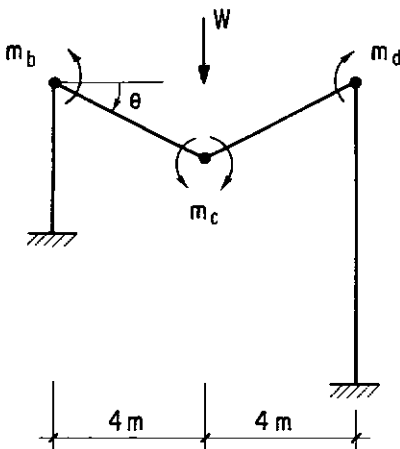
2º passo

$$\alpha = 3$$

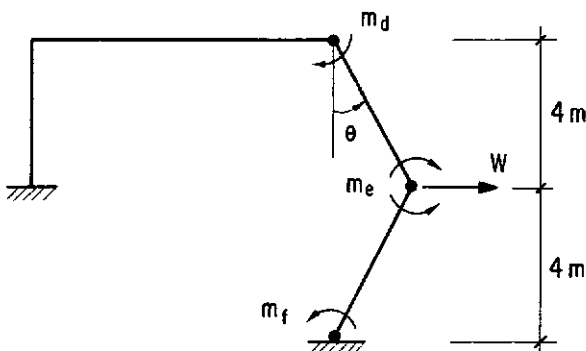
$$\eta = 6 - 3 = 3$$

3º passo

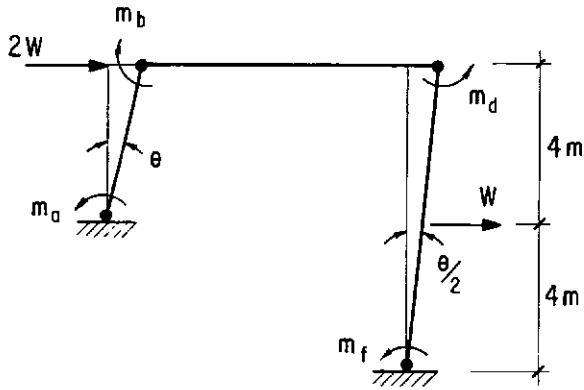
Exprimiríamos os momentos m_d , m_e e m_f em função de m_a , m_b e m_c ; fazendo uso das três cadeias singelas.



$$4W - m_b - m_d - 2m_c = 0$$



$$4W - m_d - 2m_e - m_f = 0$$



$$10W - m_a - m_b - \frac{1}{2} m_d - \frac{1}{2} m_f = 0$$

Fazendo algumas substituições nas três equações acima, chegamos as relações:

$$m_d = 4W - m_b - 2m_c$$

$$m_e = -8W + m_b + m_a$$

$$m_f = 16W - 2m_a - m_b + 2m_c$$

4º passo

$$-m_p \leq m_a \leq m_p$$

$$-m_p \leq m_d \leq m_p$$

$$-m_p \leq m_b \leq m_p$$

$$-m_p \leq m_e \leq m_p$$

$$-m_p \leq m_c \leq m_p$$

$$-m_p \leq m_f \leq m_p$$

5º passo

A resolução dessas desigualdades será obtida por meio das quatro tabelas seguintes.

NÚMERO	m_a	m_b	m_c	$f(m_p, W)$
1	- 1			m_p
2	- 1			m_p
3		1		m_p
4		- 1		m_p
5			1	m_p
6			- 1	m_p
7		- 1	- 2	$m_p + 4 W$
8		1	2	$m_p - 4 W$
9	1	1		$m_p - 8 W$
10	- 1	- 1		$m_p + 8 W$
11	- 2	- 1	2	$m_p + 16 W$
12	2	1	- 2	$m_p - 16 W$

TAB. VI

NÚMERO	m_a	m_b	$f(m_p, W)$
$a \equiv (1)$	1		m_p
$b \equiv (2)$	- 1		m_p
$c \equiv (3)$		1	m_p
$d \equiv (4)$		- 1	m_p
$e \equiv 2(5) + (7)$		- 1	$3m_p + 4 W$
$f \equiv 2(6) + (8)$		1	$3m_p - 4 W$
$g \equiv (7) + (11)$	-2	- 2	$2m_p + 20 W$
$h \equiv (8) + (12)$	2	2	$2m_p - 20 W$
$i \equiv (9)$	1	1	$m_p - 8 W$
$j \equiv (10)$	- 1	- 1	$m_p + 8 W$
$\ell \equiv (12) + 2(5)$	2	1	$3m_p - 16 W$
$m \equiv (11) + 2(6)$	- 2	- 1	$3m_p + 16 W$

TAB. VII

NÚMERO	m_a	$f(m_p, W)$
I \equiv (a)	1	m_p
II \equiv (b)	- 1	m_p
III \equiv 2(c) + (g)	- 2	$4m_p + 20 W$
IV \equiv 2(d) + (h)	2	$4m_p - 20 W$
V \equiv 2(e) + (h)	2	$8m_p - 12 W$
VI \equiv 2(f) + (g)	- 2	$8m_p + 12 W$
VII \equiv (e) + (i)	1	$4m_p - 4 W$
VIII \equiv (f) + (j)	- 1	$4m_p + 4 W$
IX \equiv (e) + (l)	2	$6m_p + 20 W$
X \equiv (f) + (m)	-2	$6m_p + 20 W$

TAB. VIII

NÚMERO	$f(m_p, W)$	lim	
		INFERIOR	SUPERIOR
2I + III	$6m_p + 20 W$	- 0,3	
2II + V	$10m_p - 12 W$		0,8
2I + X	$8m_p - 20 W$		0,4
III + V	$12m_p + 8 W$	- 1,5	
IV + X	$10m_p - 40 W$		0,25
2VII + VI	$16m_p + 4 W$	- 4	
2VII + III	$12m_p + 12 W$	- 1	
2VII + X	$14m_p - 28 W$		0,5
2II + IX	$8m_p + 20 W$	- 0,4	
III + IV	$10m_p + 40 W$	- 0,25	

TAB.IX

Observando a Tabela IX vemos que a carga de ruína é $W_c = 0,25 m_p$, conduzindo ao mecanismo de andar. O diagrama de fletores neste estágio será o da (Figura 4.u).

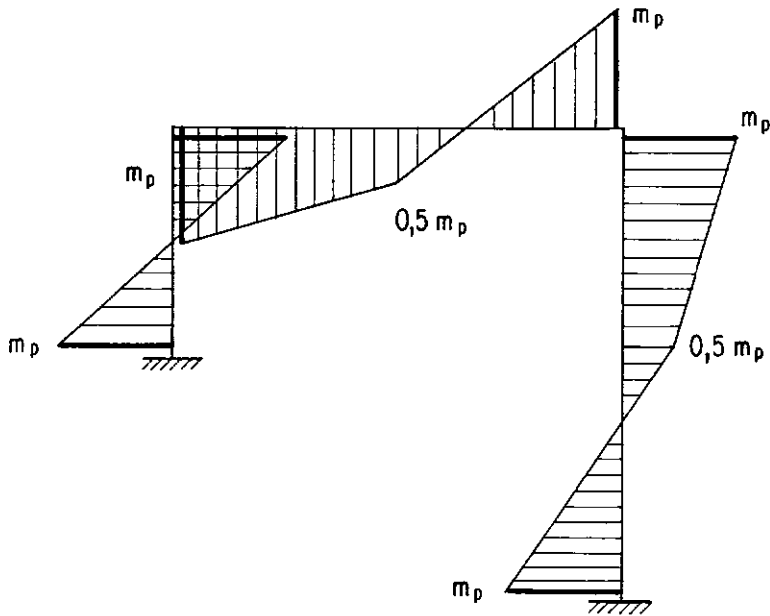


Fig. 4.u

CAPÍTULO V

INTRODUÇÃO À ACOMODAÇÃO (SHAKEDOWN)

Os métodos de análise limite de estruturas já apresentados baseiam-se na hipótese de que as cargas atuantes sobre as mesmas provocam o colapso independentemente de sua sequência de ação e mantendo invariável seu sentido de aplicação, ao sofrerem certos incrementos proporcionais, cuja magnitude pode ser facilmente calculada. Nestes casos, quando as cargas alcançam seus valores críticos, o colapso se denomina proporcional ou plástico.

Daqui para diante estudaremos um outro tipo de solicitação, no qual os limites de variação das cargas são especificados mas que a sequência de aplicação das mesmas, ainda que considerada estática, é desconhecida. É denominado *carregamento repetido variadamente*. As cargas de neve e de vento exemplificam bem esta situação.

Grüning e Kazinczy foram os primeiros a verificar, que sob carga repetida variadamente a estrutura pode ruir devido ao eventual escoamento desenvolvido em algumas de suas peças, mesmo que nenhum dos carregamentos aplicados, isoladamente, seja grande suficiente para causar o colapso plástico.

Neste sentido a estrutura pode entrar em ruína sob dois aspectos, que se denominam:

- a) plasticidade alternada;
- b) colapso incremental.

A carga limite, a partir da qual um ou outro desses dois efeitos pode acontecer, denomina-se *carga de acomodação da estrutura*. O valor dessa carga é inferior ou no máximo igual ao da carga de colapso plástico.

A análise da acomodação estrutural é mais difícil do que a correspondente pesquisa de colapso plástico, por que a acomodação é essencialmente um fenômeno elástico, e a análise elástica é necessária para cada combinação de cargas independente que possa ocorrer.

5.1 - PLASTICIDADE ALTERNADA

Em uma seção de estrutura sujeita a ação de cargas variáveis repetidas, o momento fletor oscila entre dois valores extremos que podem ser de sinais iguais ou contrários. Se os sinais são opostos, as fibras extremas da seção suportam compressão e tração alternadamente. Quando as cargas nos diferentes ciclos são reversíveis e essas fibras alcançam o limite de escoamento, localiza-se na seção uma articulação plástica. Haverá plasticidade alternada com fadiga plástica.

Esse fenômeno é bem semelhante ao da fadiga elástica. A diferença fundamental entre eles reside no fato de que, na elástica o máximo de tensão está no regime elástico de mate-

rial, e o escoamento ocorre somente perto dos pontos de alta concentração de tensão, enquanto que na plasticidade alternada porções apreciáveis do material são repetidamente solicitadas além do limite elástico.

A ruína por plasticidade alternada apresenta a característica fundamental de instalar-se antes que se formem as $\alpha + 1$ rótulas plásticas necessárias para que se alcance o fim da resistência de um sistema estrutural α vezes hiperestático, como ocorre geralmente com as cargas proporcionalmente incrementadas até seu valor crítico. Ao passo que o colapso cíclico se produz na maioria dos casos pela ruptura da seção mais solicitada alternadamente, enquanto o resto do sistema pode permanecer hiperestático.

5.2 - COLAPSO INCREMENTAL

Outro tipo de ruptura, que não difere substancialmente do anterior, é provocado quando em uma seção sujeita a cargas variáveis repetidas, o momento fletor oscila entre dois valores extremos de mesmo sinal, com o maior deles excedendo o limite elástico. Em cada fase de aplicação de cargas não reversíveis, a deformação nas articulações plásticas do sistema se incrementa em um valor finito; após determinado número de ciclos, produz-se o colapso por excesso de deformação.

Para que uma estrutura alcance o limite de sua resistência por colapso incremental, é necessário que o incremen-

to sucessivo nas rotações se produza em um número suficiente de articulações plásticas, de modo tal que todas elas se estabeleçam simultaneamente, transformando a estrutura num mecanismo.

CAPÍTULO VI

TEOREMAS DA ACOMODAÇÃO

Nesta seção daremos o fundamento do cálculo das cargas de colapso incremental W_i , e de plasticidade alternada W_a , sendo que a acomodação W_s ocorrerá para a menor dessas duas cargas. Em linguagem matemática, teremos:

$$\text{se. } W_i > W_a \rightarrow W_s = W_a$$

$$\text{se, } W_a > W_i \rightarrow W_s = W_i$$

6.1 - TEOREMA GERAL DE ACOMODAÇÃO

"Se é possível encontrar uma distribuição particular de momentos residuais, que permite todas as variações de carregamento entre seus limites extremos para um comportamento puramente elástico, então a estrutura ter-se-á acomodado, mesmo que a distribuição real de momentos residuais existente na estrutura, já acomodada, não seja necessariamente a distribuição inicial".

O teorema acima esclarece a condição para que a acomodação da estrutura ocorra.

A acomodação foi estudada em materiais dúcteis, em que a descarga pode ser considerada linear. Desta maneira o

momento residual numa dada seção pode ser calculado segundo a seguinte relação:

$$m_i = M_i - \mu_i$$

sendo m_i o momento residual na seção i , M_i o momento solicitante e μ_i o momento linear elástico na mesma seção.

Desde que para um dado carregamento, M_i e μ_i satisfaçam às condições de equilíbrio, isso implica em que o momento residual m_i deva satisfazer também essas condições, já então com carregamento externo inexistente. O sistema de momentos residuais quer real ou hipotético, que satisfaz às propriedades das equações de equilíbrio para carregamento externo nulo, é dito auto-equilibrado.

Aplicando o que já foi mencionado até aqui, passamos ao cálculo do sistema de momentos residuais auto-equilibrados, na viga bi-engastada da (Figura 4.r) que foi objeto de análise do item 4 da seção 4. Inicialmente carregaremos a viga até sua carga de colapso plástico, $W_c = 16 \frac{m}{\ell^2} p$, que solicita a estrutura como na (Figura 4.s). A seguir descarrega-se a peça. Como na descarga o comportamento é linear, isso importa em inverter-se o sentido de W_c ; traça-se o diagrama elástico (Figura 6.a) e soma-se ao diagrama anterior, obtendo-se então, o diagrama de momentos residuais da (Figura 6.b). Os diagramas momento-curvatura das seções central e extrema da mesma viga são focalizados na (Figura 6.c).

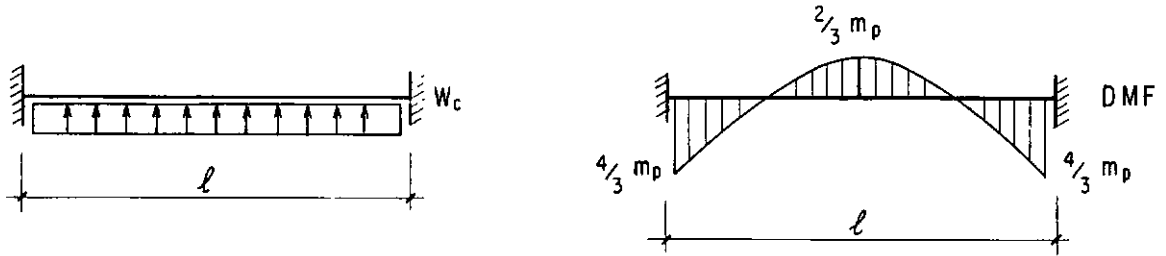


Fig. 6.a

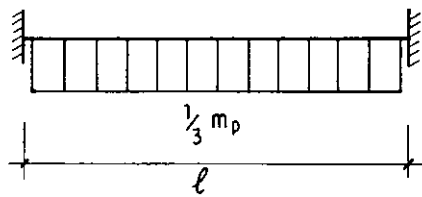


Fig. 6.b

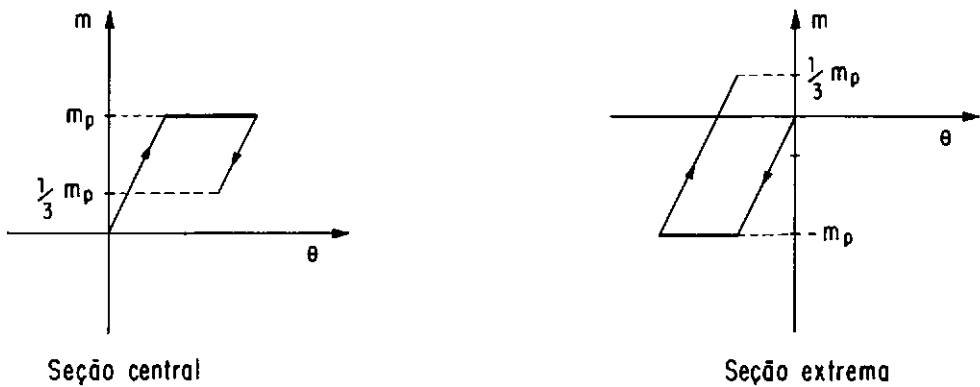


Fig. 6.c

6.2 - TEOREMA SIMPLIFICADO

O teorema da acomodação depende fundamentalmente do modelo usado na relação momento-curvatura. Aqui pretendemos formular o teorema para um tipo ideal de diagrama, mostrado na (Figura 6.d), no qual o momento de plastificação é m_p e o intervalo máximo de variação do momento elástico é $2 m_p$.

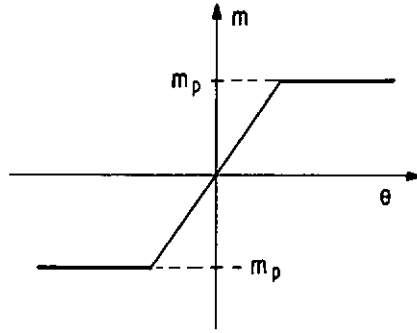


Fig. 6.d

Teorema: "Se é possível encontrar uma distribuição de momentos residuais \bar{m}_i que satisfaça em todas as seções transversais i às equações:

$$\bar{m}_i + \mu_i^{\max} \leq (m_p)_i \quad (6.1)$$

$$\bar{m}_i + \mu_i^{\min} \geq - (m_p)_i \quad (6.2)$$

e que é estaticamente admissível, então o pórtico ter-se-á acomodado, mesmo que o momento residual existente não seja necessariamente o da distribuição \bar{m}_i ".

O primeiro a estabelecer esse teorema foi Bleich, que o demonstrou para estruturas de até dois graus de indeterminação; depois atuou Melan e o demonstrou para treliças com vários graus de hiperestaticidade. Finalmente, Neal adaptou a demonstração de Melan para o caso de estruturas aporticadas cujas peças possuísem o diagrama da (Figura 6.d).

Se o carregamento cíclico ultrapassar um valor crítico, o pórtico não entra em acomodação, e sim em ruína; por plasticidade alternada ou por colapso incremental. É importante

saber-se prever o tipo de colapso da estrutura, ocorrido pelo não atendimento às condições de acomodação. Associando as inequações (6.1) e (6.2) vem:

$$-(m_p)_i - \mu_i^{\min} \leq \bar{m}_i \leq (m_p)_i - \mu_i^{\max}$$

equivale dizer então,

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min} \leq 2(m_p)_i \quad (6.3)$$

A não satisfação da inequação (6.3) implicará na ruptura do pórtico por plasticidade alternada, enquanto que as inequações (6.1) e (6.2) indicam o colapso incremental.

6.3 - TEOREMA DA ACOMODAÇÃO PARTICULARIZADO

Neste item apresentaremos o teorema para o caso mais geral da relação momento-curvatura (Figura 6.e). Foi Neal quem estendeu o teorema de acomodação, para pórticos cujas peças possuíssem o tipo mais real de relação momento-curvatura que tem m_p como momento de plastificação e $2 m_e^{\lim}$ o limite máximo de variação do momento elástico.

Assim, as condições necessárias para a estrutura entrar em acomodação são as seguintes:

$$\bar{m}_i + \mu_i^{\max} \leq (m_p)_i \quad (6.4)$$

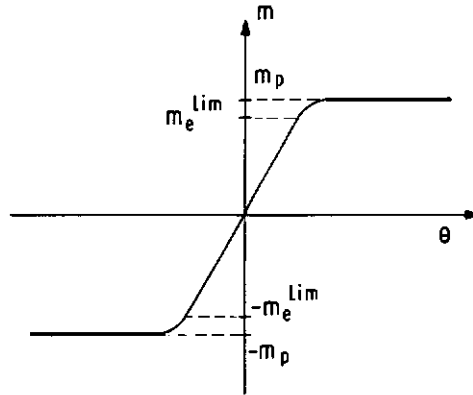


Fig. 6.e

$$\bar{m}_i + \mu_i^{\min} \geq - (m_p)_i \quad (6.5)$$

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min} \leq 2(m_e^{\lim})_i \quad (6.6)$$

Notamos que as inequações (6.4) e (6.5) são idênticas às inequações (6.1) e (6.2), portanto também indicam o colapso incremental. A inequação (6.6), vai representar a plasticidade alternada. Essa inequação poderia ser apresentada em função de um fator de forma, como abaixo:

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min} \leq \frac{2(m_p)_i}{v} \quad (6.7)$$

A hipótese simplificadora adotada nesse último modelo, estabelece-se no fato de que a variação máxima do momento elástico a cada ciclo é constante, o que contraria o comportamento real de peças de material dútil, tal como o aço. Esse efeito observado por Bauschinger, recebendo portanto seu nome, mostrou que a variação máxima do momento elástico se altera a cada novo ciclo de carga, como na (Figura 6.f).

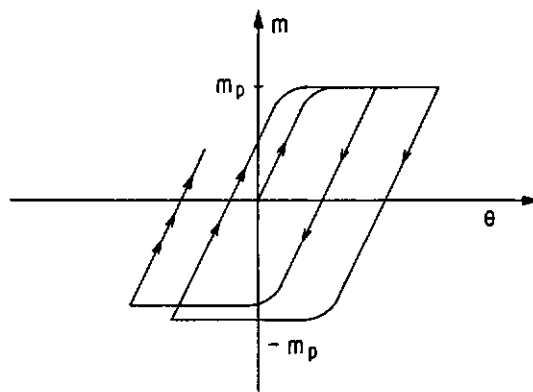


Fig. 6.f

Daí a idéia de substituir a inequação (6.6) por

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min} \leq M_{er}^{\min}$$

no qual M_{er}^{\min} é um valor em geral menor que $2 m_e^{\lim}$. Apesar desse teorema ainda não ter sido provado, já deu lugar a algumas poucas aplicações.

6.4 - TEOREMAS DO COLAPSO INCREMENTAL

Os teoremas estático, cinemático e da univocidade podem ser estabelecidos para o colapso incremental de maneira inteiramente análoga aos teoremas gerais do colapso plástico apresentados na seção 3.

Teorema estático do colapso incremental. "Se é possível encontrar uma distribuição particular de momentos residuais em todo o pórtico e a ela se possa somar, separadamente, o máximo e o mínimo momentos elásticos correspondentes à carga limite W , sem exceder o momento de plastificação em qualquer seção transversal, então o valor de W é menor ou igual à carga de

colapso incremental W_i ".

$$W \leq W_i$$

Teorema cinemático do colapso incremental. "O valor de W correspondente a um mecanismo de colapso incremental compatível com a estrutura, será maior ou igual à carga de colapso incremental W_i ".

$$W \geq W_i$$

A combinação desses dois teoremas fornece o teorema abaixo.

Teorema da univocidade do colapso incremental. "Se para um dado valor de W , uma correspondente distribuição de momentos residuais estaticamente admissível pode ser encontrada, e a ela são somados separadamente o máximo e o mínimo momentos elásticos referentes ao mesmo W sem que em alguma seção seja ultrapassado o momento de plastificação, mas que ele seja atingido em um número suficiente de seções, fazendo a estrutura transformar-se num mecanismo, esse valor de W será igual à carga de colapso incremental W_i ".

Como não poderia deixar de acontecer, as ferramentas de cálculo da carga de colapso incremental são análogas às de cálculo do colapso plástico. Dois métodos foram desenvolvidos para esse fim, o das tentativas e o da associação de mecanismos. Devido à extrema semelhança aos métodos de mesmo nome

jã apresentados, apenas aplicaremos esse último na próxima seção.

CAPÍTULO VII

APLICAÇÃO

Seja um pórtico em aço de seção transversal I, no qual a viga possui o triplo da rigidez (EJ) dos pilares e ainda pode absorver até o dobro do momento de plastificação m_p dos mesmos. Está submetido a cargas horizontal concentrada e vertical distribuída com seus limites assinalados na (Figura 7.a).

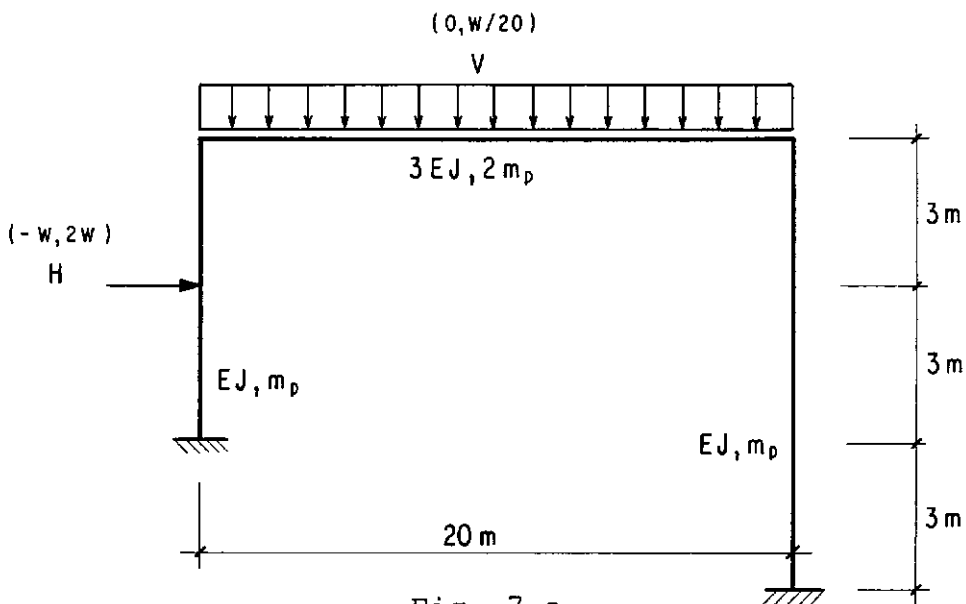


Fig. 7.a

Deseja-se comparar a carga de colapso plástico com a carga de acomodação.

Na análise do colapso plástico devem-se utilizar os limites máximos das cargas vertical (V) e horizontal (H), (Figura 7.b).

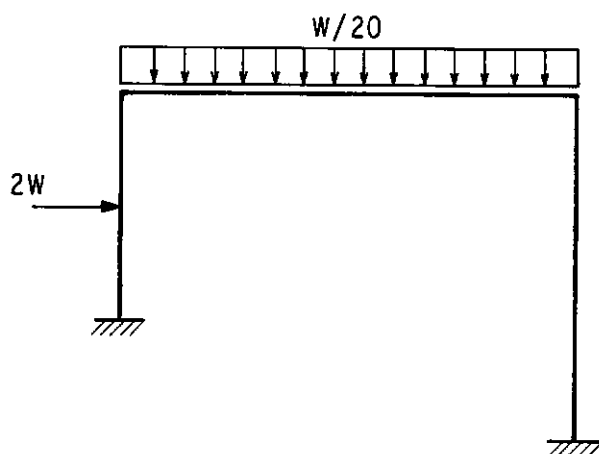
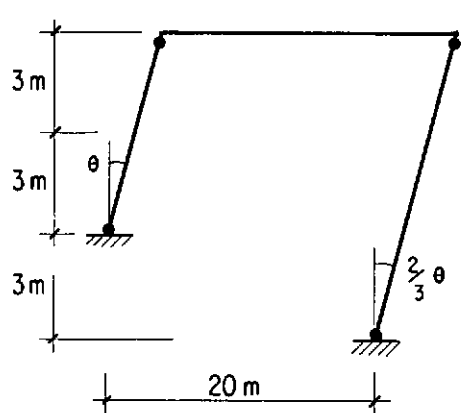


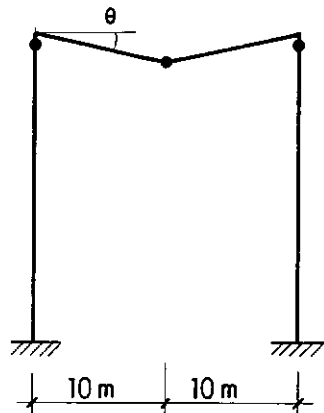
Fig. 7.b

Usaremos o método da associação de mecanismos para calcular essa carga limite. São três os mecanismos singelos, a saber:



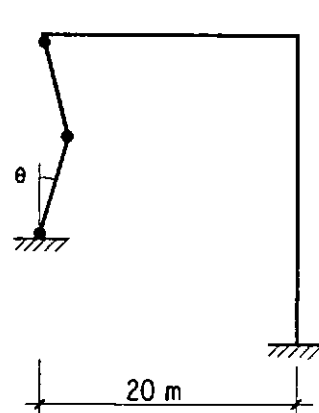
(a)

andar



(b)

viga horizontal



(c)

viga vertical

O número de mecanismos a ensaiar será:

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1 = 7$$

dos quais três |(a) + (c); (a) + (b) + (c); (b) + (c)| são eliminados por constituírem sistemas com dois graus de liberdade.

Restando apenas os mecanismos singelos e o composto do mecanismo de andar e o de viga horizontal. Abaixo vemos a resolução dos mecanismos possíveis:

$$\text{MEC (a)} \quad 2W \cdot 3\theta - m_p \cdot 2\theta - m_p \cdot 2 \cdot \frac{2\theta}{3} = 0$$

$$W = 0,56 m_p \text{ (numericamente)}$$

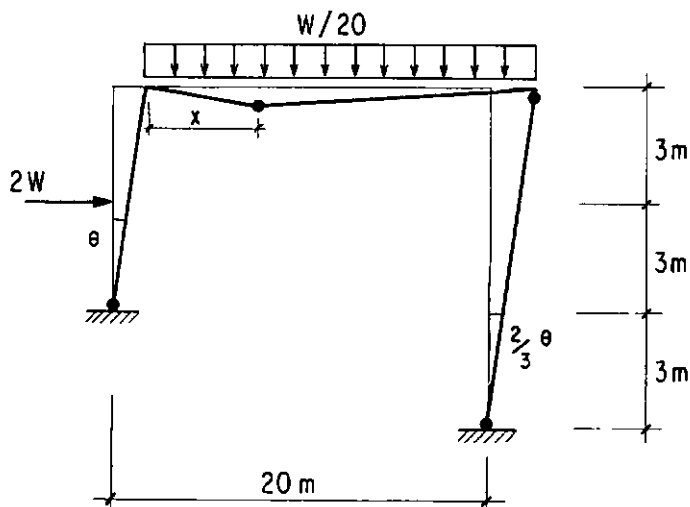
$$\text{MEC (b)} \quad \frac{W}{20} \cdot \frac{10\theta \cdot 20}{2} - m_p \cdot 2\theta - 2m_p \cdot 2\theta = 0$$

$$W = 1,2 m_p \text{ (numericamente)}$$

$$\text{MEC (c)} \quad 2W \cdot 3\theta - m_p \cdot 4\theta = 0$$

$$W = 0,67 m_p \text{ (numericamente)}$$

$$\text{MEC (a) + (b)}$$



$$2W \cdot 3\theta + \frac{\theta x}{2} \cdot 20 \cdot \frac{W}{20} - m_p \left(\theta + \frac{4\theta}{3} + \frac{x\theta}{20-x} \right) -$$

$$- 2m_p \left(\theta + \frac{x\theta}{20-x} \right) = 0$$

$$W \left(6 + \frac{x}{2} \right) = m_p \left(\frac{13}{3} + \frac{3x}{20-x} \right)$$

$$W = m_p \frac{(13/3 + 3x/(20-x))}{6 + \frac{x}{2}} \text{ ou}$$

$$W = m_p \frac{(260/3 - 4/3x)}{120 + 4x - x^2/2} \quad (7.1)$$

Para encontrarmos a menor carga de colapso associada a esse mecanismo composto, basta derivarmos a equação (7.1) em relação a x e igualarmos a zero; feito isso substituiremos o valor particular de x na mesma equação, assim:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{(-4/3)(120 + 4x - x^2/2) - (4-x) \left(\frac{260}{3} - 4/3 x \right)}{(120 + 4x - x^2/2)^2} = 0$$

$$- 160 - \frac{16}{3} x + \frac{2}{3} x^2 - \frac{1040}{3} + \frac{16}{3} x + \frac{260}{3} x - \frac{4}{3} x^2 = 0$$

$$- 506,7 + 86,7 x - 0,7 x^2 = 0$$

$$x = \frac{- 86,7 \pm 78,1}{- 1,33} = \begin{matrix} 6,5 \\ 123,6 \end{matrix} \text{ ou}$$

O valor de x que nos interessa é 6,5 m, pois o outro tem sentido apenas matemático. Prosseguindo com os cálculos, vem:

$$W = 0,62 m_p \text{ (numericamente)}$$

Portanto, pelo teorema cinemático, podemos afirmar que o mecanismo de colapso proporcional é o de andar, fornecendo a carga $W_c = 0,56 m_p$.

Para o cálculo da carga de acomodação necessitamos dos diagramas elásticos de fletores para as cargas V e H , separadamente. As seções críticas do pórtico, bem como sua orientação estão assinaladas na (Figura 7.c).

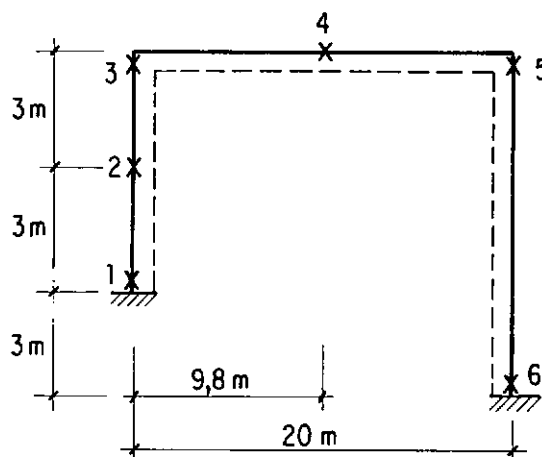


Fig. 7.c

A seguir vemos a Tabela X que calcula a envoltória dos momentos elásticos nas seções críticas.

SEÇÕES	1	2	3	4	5	6
M_e	3,89 V	-7,58 V	-19,04 V	29,62 V	-21,74 V	12,66 V
	-2,03 H	0,68 H	0,39 H	0,01 H	- 0,39 H	0,49 H
$\mu^{\max} (V, H)$	2,23 W	1,36 W	0,78 W	1,50 W	0,39 W	1,61 W
	(W/20, -W)	(0, 2W)	(0, 2W)	(W/20, 2W)	(0, -W)	(W/20, 2W)
$\mu^{\min} (V, H)$	-4,06 W	-1,06 W	-1,34 W	-0,01 W	-1,87 W	-0,49 W
	(0, 2W)	(W/20, -W)	(W/20, -W)	(0, -W)	(W/20, 2W)	(0, -W)
$\mu^{\max} - \mu^{\min}$	6,29 W	2,42 W	2,12 W	1,51 W	2,26 W	2,10 W
Mom. plast.	m_p	m_p	m_p	$2m_p$	m_p	m_p

TAB. X

$$\nu = 1,15 \text{ (consultando a Tabela I)}$$

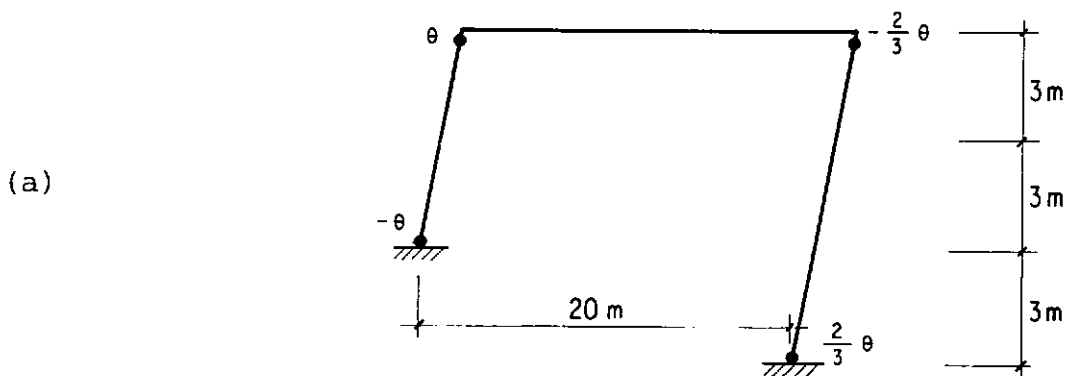
A carga de plasticidade alternada será

$$(\mu^{\max} - \mu^{\min})_{\max} \leq \frac{2 m_p}{\nu}$$

$$6,29 W_a \leq \frac{2 m_p}{1,15}$$

$$\therefore W_a = 0,28 m_p \geq W_s$$

Para o colapso incremental teremos que ensaiar as mesmas cadeias do colapso plástico.



$$\bar{m}_1 - 4,06 W \geq - m_p$$

$$\bar{m}_3 + 0,78 W \leq m_p$$

$$\bar{m}_5 - 1,87 W \geq - m_p$$

$$\bar{m}_6 + 1,61 W \leq m_p$$

Na situação limite as desigualdades desaparecem.

$$\bar{m}_1 = -m_p + 4,06 W$$

$$\bar{m}_3 = m_p - 0,78 W \quad (7.2)$$

$$\bar{m}_5 = -m_p + 1,87 W$$

$$\bar{m}_6 = m_p - 1,61 W$$

Sabendo-se que o somatório dos trabalhos dos momentos residuais nas rótulas plásticas é nulo, pois a cadeia encontra-se em equilíbrio com cargas externas nulas, vem:

$$\sum \bar{m}_i \theta_i = 0$$

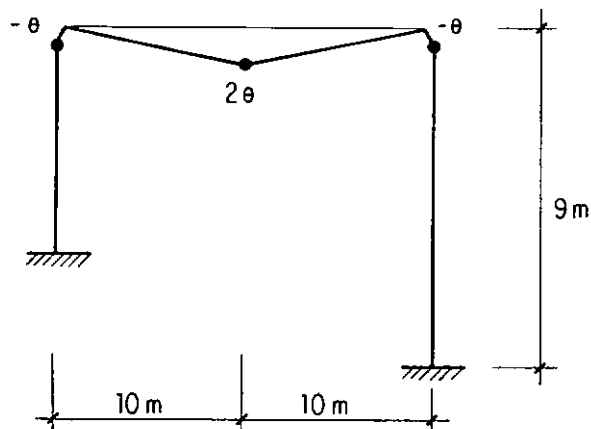
$$\bar{m}_1 (-\theta) + \bar{m}_3 (\theta) + \bar{m}_5 \left(-\frac{2}{3} \theta\right) + \bar{m}_6 \left(\frac{2}{3} \theta\right) = 0$$

$$-\bar{m}_1 + \bar{m}_3 - \frac{2}{3} \bar{m}_5 + \frac{2}{3} \bar{m}_6 = 0 \quad (7.3)$$

substituindo as equações (7.2) em (7.3), chega-se a:

$$W = 0,47 m_p \text{ (numericamente)}$$

(b)



no limite:

$$\bar{m}_3 = -m_p + 1,34 W$$

$$\bar{m}_4 = 2m_p - 1,50 W \quad (7.4)$$

$$\bar{m}_5 = -m_p + 1,87 W$$

usando $\sum \bar{m}_i \theta_i = 0$, vem

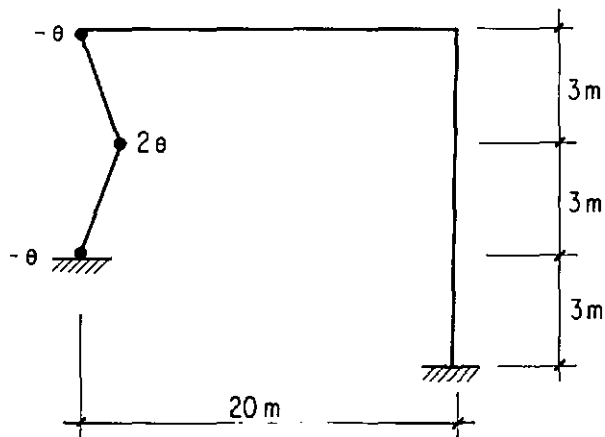
$$\bar{m}_3(-\theta) + \bar{m}_4(2\theta) + \bar{m}_5(-\theta) = 0$$

$$-\bar{m}_3 + 2\bar{m}_4 - \bar{m}_5 = 0 \quad (7.5)$$

substituindo as equações (7.4) em (7.5), tem-se

$$W = 0,97 m_p \text{ (numericamente)}$$

(c)



no limite:

$$\bar{m}_1 = -m_p + 4,06 W$$

$$\bar{m}_2 = m_p - 1,36 W \quad (7.6)$$

$$\bar{m}_3 = -m_p + 1,34 W$$

como $\sum \bar{m}_i \theta_i = 0$, vem:

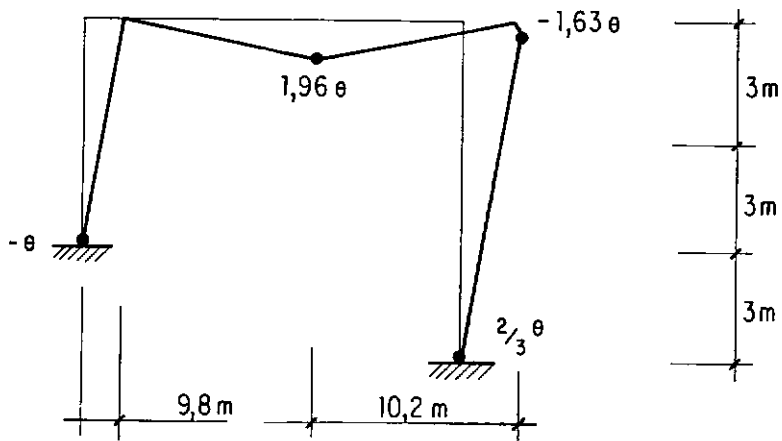
$$\bar{m}_1(-\theta) + \bar{m}_2(2\theta) + \bar{m}_3(-\theta) = 0 \quad (7.7)$$

$$-\bar{m}_1 + 2\bar{m}_2 - \bar{m}_3 = 0$$

substituindo as equações (7.6) em (7.7), tem-se:

$$W = 0,49 m_p \text{ (numericamente)}$$

(a) + (b)



no limite:

$$\bar{m}_1 = -m_p + 4,06 W$$

$$\bar{m}_4 = 2m_p - 1,50 W \quad (7.8)$$

$$\bar{m}_5 = -m_p + 1,87 W$$

$$\bar{m}_6 = m_p - 1,61 W$$

como $\sum \bar{m}_i \theta_i = 0$, vem:

$$\bar{m}_1(-\theta) + \bar{m}_4(1,96\theta) + \bar{m}_5(-1,63\theta) + \bar{m}_6(0,67\theta) = 0$$

$$\bar{m}_1 + 1,96 \bar{m}_4 - 1,63 \bar{m}_5 + 0,67 \bar{m}_6 = 0 \quad (7.9)$$

substituindo as equações (7.8) em (7.9), tem-se:

$$W = 0,65 m_p \text{ (numericamente)}$$

Embora afirme o teorema cinemático do colapso incremental, que a ruína se dê para o mecanismo de andar com $w_i = 0,47 m_p$, a estrutura já terá ruído para um valor bem inferior a este w_i . Diremos assim que a acomodação, neste caso, alcançar-se-á por plasticidade alternada, ou seja, $w_s = w_a = 0,28 m_p$.

CAPÍTULO VIII

COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL

Por volta de 1950, em Cambridge, Neal e Symonds executaram uma série de ensaios de miniatura de pórtico retangular, em aço doce. Cada quadro foi submetido a cargas H e V como na (Figura 8.a).

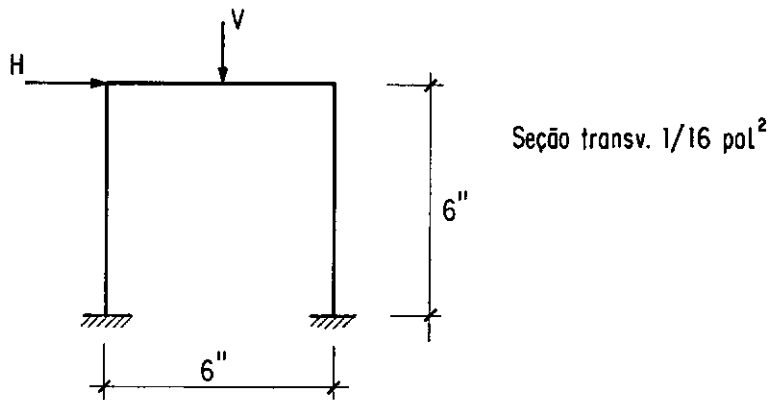


Fig. 8.a

Ao todo testaram-se sete pórticos. Em dois usou-se o controle de colapso, nos quais H e V aumentavam proporcionalmente até a ruína. Em três, o ciclo de carga era tal que H e V assumiam valores entre zero e W . Nos dois restantes, H variava entre zero e W , enquanto V , entre $-W$ e W .

A (Figura 8.b) mostra a curva carga contra deflexão horizontal ao nível da viga, para um dos pórticos submetidos a carga proporcional. A deflexão h_c , calculada a partir da carga de colapso W_c foi plotada no mesmo gráfico com um pequeno quadrado em negrito. Essa minúscula diferença foi motivada pelas aproximações envolvidas nos cálculos, rigidez dos nós e

engastamento perfeito no pé do quadro. De fato, comprovou-se que as deflexões experimentais excederam as previstas, porque os apoios permitiram um certo movimento.

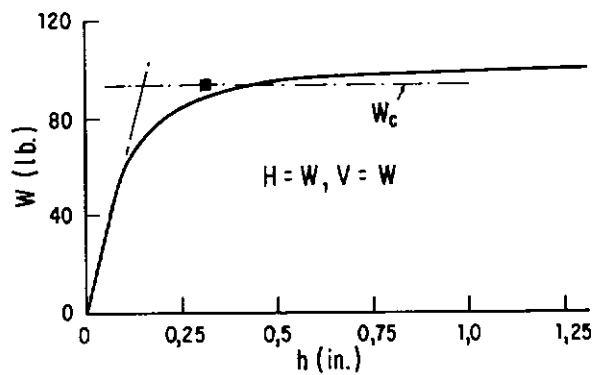


Fig. 8.b

Nos três primeiros testes de acomodação, o ciclo de carga foi o seguinte:

- (i) $H = W, V = W$
- (ii) cargas removidas
- (iii) $H = W, V = 0$
- (iv) cargas removidas

E nos outros dois, foi:

- (i) $H = W, V = W$

(ii) cargas removidas

(iii) $H = W$, $V = -W$

(iv) cargas removidas.

Para ambos os tipos de ensaio, a deflexão h foi registrada ao final da etapa (i) $H = V = W$.

O detalhe real do programa de carga para cada tipo de experimento está mostrado nas (Figuras 8.c e 8.b). Em ambas, é dada uma família de curvas, cada qual associada a um valor de W fixado. As ordenadas representam a deflexão horizontal h . As abscissas dão o número n de ciclos de carga. As curvas tracejadas indicam o comportamento teórico de cada pórtico.

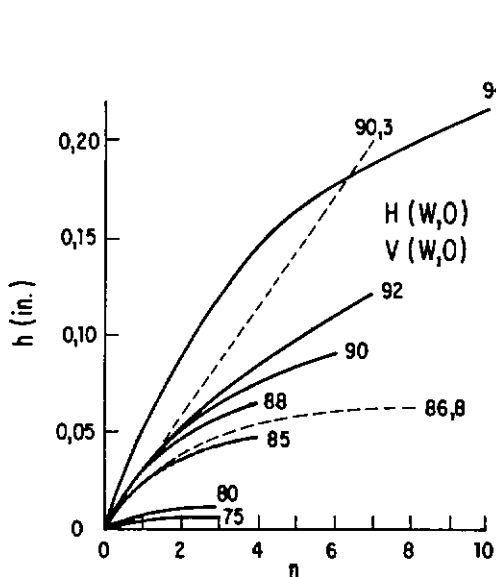


Fig. 8.c

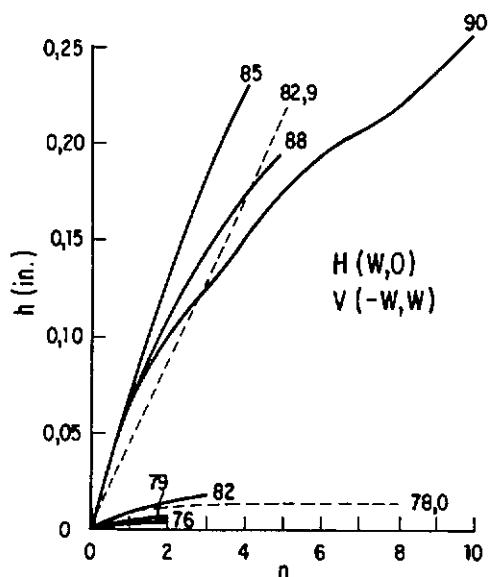


Fig. 8.d

Na (Figura 8.c), as cargas 86,8 lb e 90,3 lb, iguais respectivamente a $1,77 m_p/l$ e $1,85 m_p/l$, correspondem ao limite experimental e teórico de acomodação do pórtico particular. Já para outra figura esses limites se apresentam para as cargas 78 lb ($1,60 m_p/l$) e 82,9 lb ($1,70 m_p/l$).

Comparando os resultados teóricos e de ensaios, podemos dizer:

- (1) As deflexões são inexatas pelas razões já discutidas;
- (2) As deflexões teóricas para qualquer valor de W foram calculadas no pressuposto de que o pórtico estava livre de tensões residuais antes do começo do ciclo de carga particular. Apesar de todos os quadros terem sido tratados cuidadosamente com calor para remover qualquer tensão residual surgida na montagem, pelo caminho que os testes foram conduzidos, cada pórtico realmente possuía tensão residual devido ao possível escoamento ocorrido em ciclos anteriores.

Dando prosseguimento à análise do experimento, constituíram-se para os dois pórticos já discutidos dois gráficos (Figura 8.e e 8.f), onde a deflexão horizontal ao final da etapa (i) é plotado contra a carga. O ponto incluído num pequeno quadrado representa a deflexão calculada para a carga de acomodação teórica W_s .

A partir daí, algumas conclusões foram tiradas:

- (1) *Confirmação qualitativa* - Repetição de ciclos de carga inferior a um valor limite (W_s), causam pequena ou nenhuma de flexão. Se W exceder tal limite, o incremento total de deflexão torna-se consideravelmente grande e apresenta-se somente restringindo pelo encruamento das hastes.
- (2) *Confirmação Quantitativa* - Para os pórticos cujo limite de carga era $H(W, 0)$ e $V(W, 0)$ a experiência e a teoria concordam bem (Figura 8.c). Por outro lado, para aqueles em que os limites eram $H(W, 0)$ e $V(-W, W)$, a concordância não foi tão satisfatória, pois os valores de W_s obtidos pela experiência divergiram em mais de 5% dos teóricos. Essa discrepância foi devida à diferença entre a distribuição de momentos real e a calculada.
- (3) Para valores de W excedendo a W_s , as curvas teóricas $h-n$ apresentam-se lineares, enquanto que as experimentais mostram ligeiro declínio à medida que n cresce. Esse efeito pode provavelmente ser atribuído ao encruamento, que efetivamente aumenta o valor de m_p .

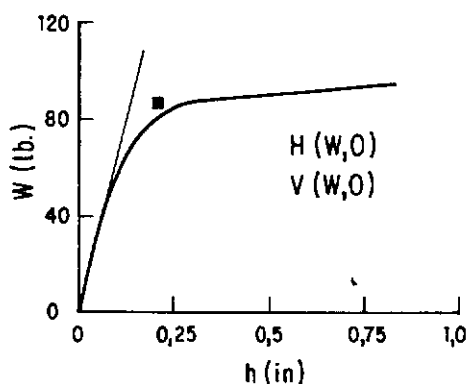


Fig. 8.d

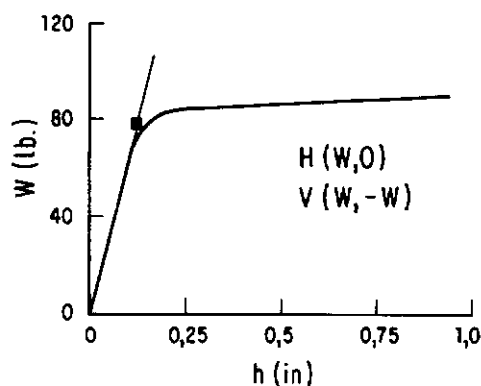


Fig. 8.f

CAPÍTULO IX

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ACOMODAÇÃO

Demonstraremos a validade do teorema da acomodação por dois caminhos:

- a) distribuição de momentos residuais
- b) distribuição de tensões residuais

Suponhamos que exista uma distribuição de momentos residuais m diferentes da distribuição \bar{m} que representa o sistema de momentos residuais satisfazendo à inequação (6.1).

$$m = M - \mu \quad (9.1)$$

Em uma seção genérica, o momento residual m resulta da diferença do momento real M na seção, provocado por um certo sistema de forças e o momento elástico μ devido ao mesmo sistema de forças (descarga linear). O momento residual m deve, em consequência, estar em equilíbrio com cargas exteriores nulas.

Consideremos a quantidade dimensional B , definida pela relação:

$$B = \frac{1}{2} \int_S \frac{(m - \bar{m})^2}{EJ} dS \quad (9.2)$$

onde EJ é a rigidez a flexão do elemento e a integral engloba toda a estrutura ao longo de seu comprimento S .

A é uma quantidade positiva, pelo quadrado que afeta o parentese no numerador. Quando as cargas sofrem um pequeno aumento, produz-se um incremento $\delta\theta$ nas rotações das articulações plásticas localizadas na estrutura e o momento residual, por sua vez, sofre um incremento δm .

O incremento δB se obtém diferenciando (9.2):

$$\delta B = \int_S (m - \bar{m}) \frac{\delta m}{EJ} dS \quad (9.3)$$

O valor $(m - \bar{m})$ pode ser introduzido na equação dos trabalhos virtuais, separando a parte elástica da estrutura, das rótulas plásticas.

$$\int_S (m - \bar{m}) \frac{\delta m}{EJ} dS + \sum (m_i - \bar{m}_i) \delta\theta_i = 0 \quad (9.4)$$

Os momentos residuais estão em equilíbrio com cargas externas nulas, por isso a eq. (9.4) é igual a zero. m_i e \bar{m}_i são os momentos residuais hipotético e efetivo, em uma rótula genérica i , cuja rotação relativa θ_i sofre um incremento $\delta\theta_i$.

Das Eqs. (9.3) e (9.4) se deduz:

$$\delta B = - \sum (m_i - \bar{m}_i) \delta\theta_i \quad (9.5)$$

Se demonstrará a diante, que o produto indicado na eq. (.5) é sempre positivo ou nulo.

$$(m_i - \bar{m}_i) \delta\theta_i \geq 0 \quad (9.6)$$

Para isso, suponhamos que em uma seção qualquer, onde se localiza uma articulação plástica, se cumpre:

$$m_i - \bar{m}_i < 0 \quad \text{ou} \quad m_i < \bar{m}_i \quad (9.7)$$

Pela inequação (6.1) tem-se que $\mu_i^{\max} + \bar{m}_i \leq (m_p)_i$, assim

$$\mu_i^{\max} + m_i < (m_p)_i \quad (9.8)$$

mas, $\mu_i^{\max} + m_i = M_i^{\max}$, onde M_i^{\max} é o máximo momento possível de ocorrer numa seção i quando o momento residual é m_i . Assim $M_i^{\max} < (m_p)_i$, e ocorrendo plastificação nessa seção $M_i^{\max} = - (m_p)_i$, e pela condição de paridade de sinal $\theta_i < 0$ (o trabalho dissipado pela rótula plástica é sempre positivo). Portanto $\delta\theta_i$ deve ser negativo, ou nulo no caso de não haver plastificação.

De forma similar se demonstra que quando

$$m_i - \bar{m}_i > 0 \quad (9.9)$$

o incremento $\delta\theta_i$ é positivo ou nulo e se cumpre em ambos os ca-

sos a Eq. (9.6), do qual resulta que o incremento δB da eq. (9.5) é sempre negativo ou nulo. Sendo B uma quantidade dimensional positiva, seu incremento não pode ser negativo e em consequência, só pode ser nulo.

Para que isto seja possível, se deve cumprir:

$$m = \bar{m}$$

Se demonstra assim que a distribuição hipotética de momentos residuais coincide com a distribuição efetiva dos mesmos. Portanto, qualquer distribuição de momentos residuais que satisfaça as inequações (6.1) e (6.2), deve necessariamente coincidir com a distribuição \bar{m} , constituindo assim a condição necessária e suficiente para que ocorra acomodação estrutural.

A demonstração do teorema de acomodação em relação à distribuição de tensões residuais é devido a Koiter. Considerando um elemento estrutural sujeito a um sistema de forças variáveis repetidas, em um instante genérico do processo de carga e descarga sucessivas, a deformação ϵ unitária de tração ou compressão é a soma de uma deformação elástica ϵ_e que cumpre a lei de Hooke e de uma certa deformação permanente ϵ_p indeterminada

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_p \quad (9.10)$$

A tensão total σ provocada pelo sistema de car-

gas atuantes resulta, em cada uma das seções da estrutura, na soma da tensão σ_e devida às mesmas cargas, se o comportamento da estrutura for perfeitamente elástico e da tensão σ_{res} correspondente à distribuição de tensões residuais ou autotensões, que permanecem na estrutura quando se anulam as cargas exteriores.

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_{res} \quad (9.11)$$

A tensão de acomodação se define como a tensão residual que cumpre a seguinte condição:

$$-\sigma_f < \sigma_{est} + \sigma_e < \sigma_f \quad (9.12)$$

σ_f é a tensão de escoamento do material em tração e compressão simples. O teorema enuncia que se existe uma distribuição de deformações permanentes de acomodação ϵ_{est} tal que as tensões correspondentes σ_{est} cumpram a eq. (9.12), a estrutura se acomodará.

Em relação às tensões, o princípio dos trabalhos virtuais exprime:

$$\phi_e = \int_V \sigma \epsilon \, dV \quad (9.13)$$

A integral engloba todo o volume da estrutura. O trabalho externo pode ser também expresso em função da energia dissipada pelas cargas nos respectivos deslocamentos.

Para demonstrar o teorema de acomodação, Koiter considera uma energia fictícia de deformação K :

$$K = \int_V \frac{1}{2E} (\sigma_{\text{res}} - \sigma_{\text{est}})^2 dV \quad (9.14)$$

Se demonstrará que K é constante enquanto não há escoamento em alguma parte da estrutura e decresce quando este existe. Por outro lado, K não pode ser negativo, o que implica que só pode produzir-se na estrutura uma quantidade limitada de rótulas plásticas. Quando a estrutura se acomoda, K se anula. Isto ocorre para $\sigma_{\text{res}} = \sigma_{\text{est}}$ e não é possível que se produzam mais deformações plásticas no sistema. σ_{est} é um valor constante, enquanto que σ_{res} varia ao se incrementarem as forças exteriores, que produzem novos aumentos nas rotações das rótulas plásticas.

Um aumento infinitesimal das solicitações define para a função K , um incremento δK e para a tensão residual, um incremento $\delta \sigma_{\text{res}}$.

$$\delta K = \int_V \frac{\delta \sigma_{\text{res}}}{E} (\sigma_{\text{res}} - \sigma_{\text{est}}) dV \quad (9.15)$$

De acordo com as Eqs. (9.10) e (9.11):

$$\frac{\delta \sigma_{\text{res}}}{E} = \frac{\delta \sigma}{E} - \frac{\delta \sigma_e}{E} = \delta \epsilon - \delta \epsilon_p - \delta \epsilon_e \quad (9.16)$$

E ainda:

$$\sigma_{\text{res}} - \sigma_{\text{est}} = \sigma - (\sigma_{\text{est}} + \sigma_e) \quad (9.17)$$

Em consequência a eq. (9.15) se transforma:

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_V (\delta \epsilon - \delta \epsilon_e) |\sigma - (\sigma_{\text{est}} + \sigma_e)| \, dV - \\ & - \int_V \delta \epsilon_p |\sigma - (\sigma_{\text{est}} + \sigma_e)| \, dV \end{aligned} \quad (9.18)$$

ϵ é a deformação real e ϵ_e a deformação correspondente a um comportamento perfeitamente elástico da estrutura.

ϵ e ϵ_e , em consequência, são deformações compatíveis com certos deslocamentos da estrutura e sua diferença também o será. A primeira integral da eq. (9.18) expressa a energia provocada pelas cargas exteriores em equilíbrio com as tensões $|\sigma - (\sigma_{\text{est}} + \sigma_e)|$.

A tensão real σ e as tensões $(\sigma_{\text{est}} + \sigma_e)$ estão em equilíbrio com as mesmas forças exteriores e a energia dissipada por sua diferença é, portanto, nula. Em consequência, a primeira integral é igual a zero e a eq. (9.18) resulta:

$$\delta K = - \int_V \delta \epsilon_p |\sigma - (\sigma_{\text{est}} + \sigma_e)| \, dV \quad (9.19)$$

Se demonstrará a seguir que o incremento δK não pode ser nunca positivo, devido a que a integral resulta sempre positiva ou nula.

Supondo que seja

$$\delta \varepsilon_p > 0 \quad (9.20)$$

o escoamento se produz, então, por tração e $\sigma = f_{yk}$.

De acordo com a eq. (9.12):

$$\sigma_{est} + \sigma_e < f_{yk} \quad (9.21)$$

Suponhamos agora que

$$\delta \varepsilon_p < 0 \quad (9.22)$$

o escoamento se produz por compressão e se cumpre:

$$\sigma_{est} + \sigma_e > - f_{yk} \quad (9.23)$$

Por último, se

$$\delta \varepsilon_p = 0$$

a integral é nula. Mostrando assim, que para qualquer valor de $\delta \varepsilon_p$ o produto

$$\delta \varepsilon_p |\sigma - (\sigma_{est} + \sigma_e)| \geq 0 \quad (9.24)$$

é sempre positivo e o incremento δK resulta portanto menor ou

igual a zero. Enquanto não se produz escoamento no sistema a eq. (9.24) é nula e não existem incrementos δK na energia fictícia de deformação K , a qual permanece constante. A medida que se desenvolvem as rotações nas rótulas plásticas do sistema, a magnitude de δK aumenta e, em consequência, a função K decresce. Quando esta última se anula, a estrutura se encontra acomodada.

As demonstrações do teorema da acomodação de um sistema estrutural em relação às distribuições de momentos residuais ou de tensões, são igualmente válidas, em razão da interdependência existente entre ambas. Particularmente preferimos a primeira face à sua maior facilidade de compreensão e por tratar apenas com entidades (momentos) envolvidas diretamente no teorema.

CAPÍTULO X

CONCLUSÕES

Com respeito aos métodos de cálculo do colapso plástico, a priori não existe uma razão para escolha desse ou daquele método. A preferência deve ser dada ao que melhor se adapte à aplicação, proporcionando assim, maior agilidade à solução. Particularmente, sempre que possível, procuramos usar o método da associação de mecanismos, apenas por motivos construtivos.

Comparando os resultados dos últimos exemplos dos itens 4.1 e 4.2 podemos concluir que a estrutura comporta-se melhor sob carga distribuída, tendo em vista que essa carga foi cerca de 17% superior à carga concentrada.

A carga de acomodação é estreitamente ligada à análise elástica da estrutura, portanto, pode ser determinada tanto para carregamentos aplicados diretamente à peça, como para variações de temperatura ou recalques de apoio, ao passo que a carga de colapso plástico apenas é calculada para o primeiro desses tipos de solicitação.

Comprovamos que o carregamento repetido variadamente exige uma "performance" muito mais apurada da estrutura, sendo no caso do pórtico da seção 7, possível uma carga 50% menor que a do colapso plástico para o mesmo se acomodar.

Ainda na seção 7 podemos observar que o mecanismo de colapso proporcional coincidiu com o de colapso incremental, ou seja, mecanismo de andar. Esse fato foi fruto do mero acaso, pois o colapso incremental se obtém de uma análise elástica completa, enquanto o proporcional, apenas pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais às cadeias cinemáticas.

Apesar de nos referirmos apenas a estruturas em aço neste trabalho, poder-se-ia também fazer a análise do colapso proporcional para peças de concreto armado. Para tanto é necessário que a peça seja subarmada, isto é, a armadura de tração comece a escoar antes do rompimento por compressão do concreto. Com isso o momento de plastificação m_p para uma seção retangular (Figura 10.1) é dado por:

$$m_p = f_{yk} \cdot A_s \cdot \left(h - \frac{f_{yk} \cdot A_s}{2b f_{ck}} \right)$$

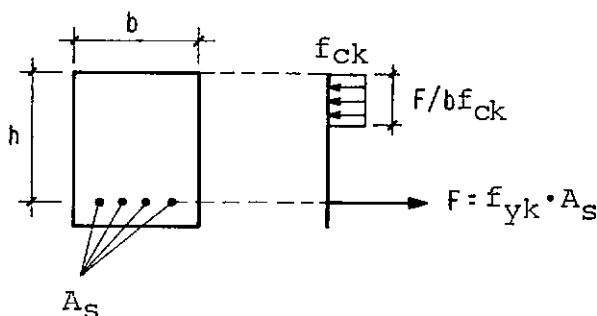
onde, f_{yk} tensão de escoamento da armadura

f_{ck} tensão de ruptura por compressão do concreto

A_s área da seção transversal da armadura

h altura útil da peça

b largura da peça



Já o estudo de acomodação para estruturas em concreto torna-se inviável seja pela fragilidade desse material à tração, em face a acomodação, em geral, ser alcançada por plasticidade alternada, ou pela fissuração excessiva, no caso menos comum daquele limite ser atingido por colapso incremental.

BIBLIOGRAFIA

1. BAKER, J. F.; HORNE, M. R. e HEYMAN, J. - The Steel Skeleton, Cambridge U. P., Cambridge, 1956.
2. CĂMPORA, G. F. - Cálculo Plástico - Análisis y Diseño Limite de Sistemas Estructurales Planos, Universidad de la Prov. de Buenos Aires, Buenos Aires, 1967.
3. CARNEIRO, F. L. L. B. - Cálculo das Estruturas Hiperestáticas de Concreto Armado na Fase Plástica, 1^{as}. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Lisboa, 1965.
4. COHN, M. Z. - Analysis and Design of Inelastic Structures, University of Waterloo Press, Canadá, 1972.
6. COHN, M. Z. - Ductility of Reinforced Concrete Sections in Bending. Study nº 8, Paper 5. University of Waterloo Press, 1972.
7. COHN, M. Z. - Engineering Plasticity by Mathematical Programming, University of Waterloo Press, Canadá, 1977.
7. DAVIES, J. M. - Collapse and Shakedown Loads of Plane Frames, Journal of the Structural Division, ASCE, June 1967.
8. LANGENDONCK, T. V. - Teoria Elementar das Charneiras Plásticas I, Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1970.

9. NEAL, B. G. - The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, Londres, 1956.
10. PARK, R. e PAULAY, T. - Reinforced Concrete Structures, John Wiley & Sons, USA, 1975.
11. PRAGER, W. e HODGE, P. G. - Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley & Sons, Inc. 1963.
12. SAMPAIO, J. da C. - Cálculo à Ruptura das Estruturas Hiperestáticas de Betão Armado. Determinação da Capacidade de Rotação das Rótulas Plásticas. 2^{as}. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, São Paulo, agosto 1967.
13. SANTOS, S. M. G. dos - Acomodação Estrutural, Colapso Incremental e Linhas de Influência no Cálculo Plástico. Revista Estrutura nº 38.
14. SANTOS, S. M. G. dos - Cálculo Estrutural na Fase Plástica, PUC, Rio de Janeiro, 1967.
15. SANTOS, S. M. G. dos - O Método da Associação dos Mecanismos no Cálculo Hiperestático na Fase Plástica, Revista Estrutura, nº 33, 1961.
16. SANTOS, S. M. G. dos - O Método da Distribuição de Momentos no Cálculo Plástico, PUC, Rio de Janeiro.